4575-21
3-1

Journal für die reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826

fortgeführt von

C. W. Borchardt, K. Weierstrass, L. Kronecker,
L. Fuchs, K. Hensel, L. Schlesinger

gegenwärtig herausgegeben von

Helmut Hasse und Hans Rohrbach

unter Mitwirkung von

W. Brödel, M. Deuring, A. Grothendieck, P. R. Halmos, O. Haupt,
F. Hirzebruch, E. Hopf, M. Kneser, G. Köthe, K. Prachar,
P. Roquette, W. Schmeidler, L. Schmetterer, E. Stiefel

Band 199

In 4 Heften

Walter de Gruyter & Co.

vormals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung / J. Guttentag, Verlagsbuchhandlung / Georg Reimer / Karl J. Trübner / Veit & Comp.

Berlin 1958

MATH
NMI
J8264
v.199-201

Archiv-Nr 180358
Satz von Walter de Gruyter & Co., Berlin W 35
Druck von Buchkunst, Berlin W 35
Printed in Germany

Jan. 4, 1960
B.P.

Inhaltsverzeichnis des Bandes 199

Seite

Benz, Walter, Axiomatischer Aufbau der Kreisgeometrie auf Grund von Doppelverhältnissen 56

Bergström, Harald, On the Limit Theorems for Convolutions of Distribution Functions. II 1

Fladt, Kuno, Die allgemeine Kegelschnittsgleichung in der ebenen hyperbolischen Geometrie. II 203

Gold, Richard R. & M. Z. v. Krzywoblocki, On Superposability and Self-Superposability Conditions for Hydrodynamic Equations Based on Continuum. I 139

Kasch, Friedrich, Wesentliche Komponenten bei Gitterpunktmengen. II . . . 53

Krzywoblocki, M. Z. v. siehe **Richard R. Gold**

Leopoldt, Heinrich-Wolfgang, Zur Struktur der *l*-Klassengruppe galoisscher Zahlkörper 165

Loonstra, F., Fortsetzung von Gruppenhomomorphismen 192

Mahler, K., An Interpolation Series for Continuous Functions of a *p*-adic Variable 23

Moór, Arthur, Untersuchungen in Räumen mit rekurrenter Krümmung . . . 91

Nikodým, Otton Martin, On extension of a given finitely additive field-valued measure on a finitely additive Boolean tribe to another one more ample 35

Pinl, M., Ch. Loewners Transformationstheorie der partiellen Differentialgleichungen der Gasdynamik 175

Pöschl, Klaus, Über Anwachsen und Nullstellenverteilung der ganzen transzendenten Lösungen linearer Differentialgleichungen. I 121

Rieger, G. J., Verallgemeinerung der Siebmethode von A. Selberg auf algebraische Zahlkörper. I 208

—,— Verschärfung des Satzes von Richert über die Verteilung der quadratfreien Zahlen mit genau *r* Primfaktoren in einer arithmetischen Progression 215

Sade, Albert, Quasigroupes automorphes par le groupe linéaire et géométrie finie 100

Uluçay, Cengiz, The Exact Value of the Bloch-Landau Constants $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{L}$ 188

Ausgabedaten der Hefte von Bd. 199

Heft 1/2 ausgegeben am 30. April 1958

Heft 3/4 ausgegeben am 1. August 1958

On the Limit Theorems for Convolutions of Distribution Functions. II.

An Analysis in the Weierstrass Norm.

By *Harald Bergström* in Göteborg.

---

10. The limit problem for convolutions of d. f.'s. Notations.

Consider double sequences $\{F_k(n, x)\}$ of d. f.'s, $k = 1, 2, \ldots, n = 1, 2, \ldots$. Define

$$F_{k\lambda}(n, x) = \begin{cases} \varepsilon(x) \text{ for } \lambda = k, \\ F_{k+1}(n, x) \text{ for } \lambda = k+1, \\ F_{k+1}(n, x) * \cdots * F_\lambda(n, x) \text{ for } \lambda > k+1. \end{cases}$$

Let further $\{k_n\}$ be a sequence of positive integers, which tends to ∞ as $n \to \infty$. A fundamental problem in the theory of probability is the following one. When does $F_{0k_n}(n, x)$ tend weakly to a d. f. $F(x)$ as $n \to \infty$? We shall consider this problem under the following restriction.

Condition C: 1° $F_k(n, x) \to F_k(x)$ $(n \to \infty)$ with d. f.'s $F_k(x)$, uniformly in respect to k for any continuity point of all $F_k(x)$. 2° $F_k(x) \to \varepsilon(x)$ $(k \to \infty)$.

If here $F_k(x) = \varepsilon(x)$ for all k, we say that $\{F_k(n, x)\}$ satisfies the condition C_0.

The general solution of the mentioned limit problem under the Condition C_0 has been given by Bowly and Khintchine.

The condition C can be stated also in the following form

$$(10.1) \qquad \begin{cases} F_k(n, x) \to F_k(x) \in D & (n \to \infty) \text{ for any } k, \\ F_k(n, x) \to \varepsilon(x) & \begin{pmatrix} n \to \infty \\ k \to \infty \end{pmatrix}. \end{cases}$$

It can easily be proved that the two formulations are equivalent.

According to Theorem 9. 5 (compare also the remark at the end of Section 9), we further can give the C-condition in the following forms

$$(10.2) \qquad \begin{cases} N_\sigma[F_k(n, x) - F_k(x)] \to 0 & (n \to \infty) \\ \qquad \text{(uniformly in respect to } k), \\ N_\sigma[F_k(x) - \varepsilon(x)] \to 0 & (k \to \infty), \end{cases}$$

and

$$(10.3) \qquad \begin{cases} N_\sigma[F_k(n, x) - F_k(x)] \to 0 & (n \to \infty), \\ N_\sigma[F_k(n, x) - \varepsilon(x)] \to 0 & \begin{pmatrix} n \to \infty \\ k \to \infty \end{pmatrix}. \end{cases}$$

When we consider convolutions $F_{0k_n}(n, x)$ for a sequence $\{k_n\}$ of positive integers, we shall always assume that $\{k_n\}$ is non decreasing and $k_n \to \infty$ as $n \to \infty$. It may be observed that this is no essential restriction, since we can introduce new components $\varepsilon(x)$ and $\varepsilon(x)$ is unit element for the convolution operation.

We call $\{F_k(n, x)\}$ centered if

$$\limsup_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left| \int_{|x| \leq \xi} x dF_k(n, x) \right| < \infty \text{ for } \xi < \infty \tag{10. 4}$$

and centered in the W-norm if

$$\limsup_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} N_\sigma[F_k(n, x) - \varepsilon(x)] < \infty \tag{10. 5}$$

for any $\sigma > 0$. According to Lemma 8. 1, $\{F_k(n, x)\}$ is centered if it is centered in the W-norm.

We call $\{F_k(n, x)\}$ a C- (C_0-) sequence (for n) if it satisfies the C- (C_0-) condition.

To any convolution $F_{k\lambda}(n, x)$ of d. f.'s $F_i(n, x)$, we associate the function

$$f_{k\lambda}(n, x) = \sum_{i=k+1}^{\lambda} [F_i(n, x) - \varepsilon(x)],$$

which obviously is a normal q. d. f., and call $f_{k\lambda}(n, x)$ the associated q. d. f. of $F_{k\lambda}(n, x)$.

The notations introduced in this section shall constantly be used in the following.

At last we remark that $G_{k\lambda}(x)$ denotes the function defined by the convolution

$$G_{k+1}(x) * G_{k+2}(x) \cdots * G_\lambda(x).$$

Thus $G_{k\lambda}(x + m)$ denotes the function obtained from $G_{k\lambda}(x)$ when x is changed against $x + m$ — not the convolution of the functions $G_i(x + m)$. We easily find that, with this notation,

$$G_{k+1}(x + m) * G_{k+2}(x + m) \cdots * G_\lambda(x + m) = G_{k\lambda}[x + (\lambda - k) m].$$

11. On relations between convolutions and their associated q. d.f.'s.

To begin with we give some elementary identities in a commutative algebra R over the rational numberfield. Let a_k and b_k ($k = 1, 2, \ldots$) belong to R, and let R have a unit element e. We use the notations

$$a_{\lambda k} = \begin{cases} e, \text{ if } k = \lambda, \\ a_{\lambda+1}, \text{ if } k = \lambda + 1, \\ a_{\lambda+1} a_{\lambda+2} \cdots a_k, \text{ if } k > \lambda + 1. \end{cases}$$

Let $b_{\lambda k}$ have the corresponding signification. Then the identity

$$a_{0p} - b_{0p} = \sum_{k=1}^{p} (a_k - b_k)\, a_{0k-1} b_{kp} \tag{11. 1}$$

holds. It can immediately be verified. We have here taken the indices $1, 2, \ldots, p$ in their natural order. Permuting these indices in (11. 1), we get $p!$ identities of the form (11. 1), where the left side is the same in all such identities. Adding the identities, and dividing by $p!$, we get a symmetric identity of the form

$$a_{0p} - b_{0p} = \sum_{k=1}^{p} (a_k - b_k)\, \psi_k, \tag{11. 2}$$

where all ψ_k belong to the algebra R. Obviously $p!\,\psi_k$ is a sum of $p!$ products of the form

$$a_{\nu_1} a_{\nu_2} \cdots a_{\nu_r} b_{\nu_{r+1}} \cdots b_{\nu_{p-1}}, \tag{11. 3}$$

where $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{r+1}, \cdots \nu_{p-1}$ are the numbers $1, 2, \ldots, k-1, k+1, \ldots, p$ in any order and r is any of the numbers $0, 1, \ldots, p-1$. We also observe that, according to the symmetry, ψ_k and ψ_j, are transformed into each other by the substitution $k \to j$, $j \to k$ in the indices of all those products (11. 3) which determine ψ_j and ψ_k. Hence

$$p!(\psi_k - \psi_j) = \sum_{\nu=1}^{\frac{1}{2}(p!)} (a_j - a_k)\, A_{kj\nu} + \sum_{\nu=1}^{\frac{1}{2}(p!)} (b_j - b_k)\, B_{kj\nu}, \tag{11. 4}$$

where $A_{kj\nu}$ and $B_{kj\nu}$ are of the form

$$a_{\nu_1} a_{\nu_2} \cdots a_{\nu_r} b_{\nu_{r+1}} \cdots b_{\nu_{p-2}},$$

$\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{p-2}$ all unequal and unequal to k and j.

If all a_k and b_k belong to a certain semi-group, $A_{kj\nu}$ and $B_{kj\nu}$ thus belong to the same semi-group.

Consider now the linear set $R(D)$, which is made to an algebra over the rational (real) numberfield, when the convolution is introduced as a multiplicative operation. Putting then $a_i = U_i(x)$, $b_i = V_i(x)$, with d. f.'s $U_i(x)$ and $V_i(x)$, we find that every ψ_k as mean value of d. f.'s is itself a d. f. Using this fact, we can show

Lemma 11. 1. *If $U_{0p}(x)$ and $V_{0p}(x)$ are convolutions of d. f.'s with the associated q. d. f.'s $u_{0p}(x)$ and $v_{0p}(x)$ respectively*[10]*, then*

$$N_\sigma[U_{0p} - V_{0p}] \leqq N_\sigma[u_{0p} - v_{0p}] + \varrho_p(\sigma),$$

where

$$\varrho_p(\sigma) = \frac{1}{2p} \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{p} \{N_\sigma[(U_i - V_i) * (U_j - U_i)] + N_\sigma[(U_i - V_i) * (V_j - V_i)]\}.$$

Proof. Applying the identity (11. 2), we obtain

$$N_\sigma[U_{0p} - V_{0p}] = N_\sigma\left[\sum_{i=1}^{p} [U_i - V_i] * \psi_i\right],$$

where all ψ_i are d. f.'s. Putting

$$\mathring{\psi} = \frac{1}{p} \sum_{j=1}^{p} \psi_j,$$

and observing that then $\mathring{\psi}$ is a d. f., we get

$$\begin{aligned} N_\sigma[U_{0p} - V_{0p}] &= N_\sigma\left[\sum_{i=1}^{p} [U_i - V_i] * [\mathring{\psi} + \psi_i - \mathring{\psi}]\right] \\ &\leqq N_\sigma\left[\sum_{i=1}^{p} [U_i - V_i]\right] + N_\sigma\left[\sum_{i=1}^{p} (U_i - V_i) * (\psi_i - \mathring{\psi})\right]. \end{aligned} \tag{11. 5}$$

Here

$$\sum_{i=1}^{p} [U_i - V_i] = u_{0p} - v_{0p}.$$

[10]) The notations are the same as in Section 10.

By the definition of $\mathring{\psi}$, we further have

$$\psi_i - \mathring{\psi} = \frac{1}{p} \sum_{j=1}^{p} (\psi_i - \psi_j) \tag{11.6}$$

and by (11. 4)

$$\psi_i - \psi_j = \frac{1}{p!} \sum_{\nu=1}^{\frac{1}{2}(p!)} \{(U_j - U_i) * A_{ij\nu} + (V_j - V_i) * B_{ij\nu}\}.$$

Thus we get

$$\begin{aligned} (11.7) \quad & N_\sigma[(U_i - V_i) * (\psi_i - \psi_j)] \\ & \leqq \tfrac{1}{2} \{N_\sigma[(U_i - V_i) * (U_j - U_i)] + N_\sigma[(U_i - V_i) * (V_j - V_i)]\}. \end{aligned}$$

Combining (11. 5), (11. 6) and (11. 7), we get Lemma 11. 1.

Now we state

Lemma 11. 2. *Let $\{U_i(n, x)\}$ and $\{V_i(n, x)\}$ be sequences of d. f.'s which are centered in the W-norm and let*

$$1^\circ \qquad N_\sigma[U_i(n, x) - H_i(x)] \to 0, \quad N_\sigma[V_i(n, x) - H_i(x)] \to 0$$

uniformly in respect to i for $i \geqq 1$ as $n \to \infty$, where all $H_i(x)$ are d. f.'s. Then we have

$$1' \qquad \limsup_{\substack{m \to \infty \\ n \to \infty}} \{N_\sigma[U_{k\lambda}(n, x) - V_{k\lambda}(m, x)] - N_\sigma[u_{k\lambda}(n, x) - v_{k\lambda}(m, x)]\} \leqq 0$$

and this holds uniformly in respect to k and λ for $1 \leqq k \leqq \lambda < \infty$[11]).

Remark. If the d. f.'s $U_i(n, x)$ and $V_i(n, x)$ depend on another parameter r belonging to a given set, and if the sequences are uniformly centered in the W-norm in respect to r, and if $U_i(n, x)$ and $V_i(n, x)$ tend to $H_i(x)$ in the W-norm, uniformly in respect to r and i, then $1'$ holds uniformly also in respect to r.

Lemma 11. 3. *If $\{U_i(n, x)\}$ and $\{V_i(n, x)\}$ are C-sequences and centered in the W-norm, then we have*

$$\limsup_{r \to \infty} \left[\limsup_{n \to \infty} \{N_\sigma[U_{k_1\lambda_1}(n, x) - V_{k_2\lambda_2}(n,x)] - N_\sigma[u_{k_1\lambda_1}(n, x) - v_{k_2\lambda_2}(n, x)]\}\right] \leqq 0$$

uniformly in respect to $k_1, k_2, \lambda_1, \lambda_2$ for $r \leqq k_1 \leqq \lambda_1 < \infty$ and $r \leqq k_2 \leqq \lambda_2 < \infty$.

Proof of Lemma 11. 2. Consider the inequality of Lemma 11. 1 and put $U_i = U_i(n, x)$, $V_i = V_i(m, x)$. Writing

$$\begin{aligned} U_i - V_i &= U_i - H_i + H_i - V_i, \\ U_j - U_i &= U_j - \varepsilon(x) + \varepsilon(x) - U_i, \end{aligned}$$

and using the remark on Theorem 8. 1 we easily get

$$\begin{aligned} & N_\sigma[(U_i - V_i) * (U_j - U_i)] \\ & \leqq c\{N_{\sigma/\sqrt{2}}[U_i - H_i] + N_{\sigma/\sqrt{2}}[V_i - H_i]\} \{N_\sigma[U_j - \varepsilon(x)] + N_\sigma[U_i - \varepsilon(x)]\} \end{aligned}$$

with an absolute constant c.

Hence we obtain from Lemma 11. 1

$$\begin{aligned} (11.8) \quad & N_\sigma[U_{r\lambda} - V_{r\lambda}] - N_\sigma[u_{r\lambda} - v_{r\lambda}] \\ & \leqq c\{\sup_{i>r} N_{\sigma/\sqrt{2}}[U_i - H_i] + \sup_{i>r} N_{\sigma/\sqrt{2}}[V_i - H_i]\} \sum_{i=1}^{\infty} \{N_\sigma[U_i - \varepsilon(x)] + N_\sigma[V_i - \varepsilon(x)]\}, \end{aligned}$$

[11]) what means that the right side for finite n and m may be given as a function $\varepsilon(n, m)$ which is independent of k, λ and tends to 0 as $\begin{pmatrix} n \to \infty \\ m \to \infty \end{pmatrix}$.

Let now $U_i = U_i(n, x)$ and $V_i = V_i(n, x)$ satisfy the conditions of the lemma. Then the infinite sum on the right side of (11. 8) is uniformly bounded in respect to n and m. Hence the left side of (11. 8) tends to 0 as $\begin{pmatrix} n \to \infty \\ m \to \infty \end{pmatrix}$. This also holds for $r = 0$. Hence the lemma is proved. It is easily seen that the statement in the remark on the lemma is true.

Proof of Lemma 11. 3. Since we now have

$$\sup_{i>r} N_{\sigma/\sqrt{2}}[U_i(n, x) - \varepsilon(x)] + \sup_{i>r} N_{\sigma/\sqrt{2}}[V_i(n, x) - \varepsilon(x)] \to 0 \qquad \begin{pmatrix} n \to \infty \\ r \to \infty \end{pmatrix},$$

we get the lemma in the same way as we have proved Lemma 11. 2.

12. Sufficient conditions for the convergence of convolutions of C-sequences, which are centered in the W-norm.

To begin with we prove

Theorem 12. 1. *If $\{F_k(n, x)\}$ is a C-sequence, which is centered in the W-norm, then $\{F_k(x)\}$ is also centered in the W-norm, and $\{f_{0k}(x)\}$ is Cauchy convergent in the W-norm* (hence QM-convergent).

Proof. Observing that $F_i(n, x) \to F_i(x)$ as $n \to \infty$, and applying Lemma 5. 1, we get

$$N_\sigma[F_i(n, x) - \varepsilon(x)] \to N_\sigma[F_i(x) - \varepsilon(x)] \qquad (n \to \infty).$$

Hence, using the fact that $\{F_k(n, x)\}$ is centered in the W-norm, we get

$$\sum_{i=1}^{k} N_\sigma[F_i(x) - \varepsilon(x)] = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{k} N_\sigma[F_i(n, x) - \varepsilon(x)]$$

$$\leqq \limsup_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} N_\sigma[F_i(n, x) - \varepsilon(x)] < \infty$$

for every $\sigma > 0$. Thus the series $\sum_{i=1}^{\infty} N_\sigma[F_i(x) - \varepsilon(x)]$ is convergent and the sequence $\{F_i(x)\}$ is centered in the W-norm. Since the series is convergent, it is Cauchy convergent and we obtain

$$N_\sigma[f_{0\lambda}(x) - f_{0k}(x)] = N_\sigma[f_{k\lambda}(x)] \leqq \sum_{i=k+1}^{\lambda} N_\sigma[F_i(x) - \varepsilon(x)] \to 0 \qquad \begin{pmatrix} k \to \infty \\ \lambda \to \infty \end{pmatrix},$$

i. e. $\{f_{0k}(x)\}$ is Cauchy convergent in the W-norm.

Now we state

Theorem 12. 2. *If $\{F_k(n, x)\}$ is a C-sequence, which is centered in the W-norm, and if $\{f_{0k_n}(n, x)\}$ is Cauchy convergent in the W-norm, then the following relations hold*

1° $\qquad F_{0k}(n, x) \to F^{(1)}(x) \qquad (n \to \infty,\ k \to \infty),$

2° $\qquad F_{kk_n}(n, x) \to F^{(2)}(x) \qquad (n \to \infty,\ k \to \infty),$

where $F^{(1)}(x)$ and $F^{(2)}(x)$ are d. f.'s.

Proof. Applying Lemma 11. 2 and putting $F_k(n, x) = \varepsilon(x)$ for $k > k_n$ we obtain

$$\text{(12. 1)} \quad \limsup_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} \{N_\sigma[F_{kk_n}(n, x) - F_{kk_m}(m, x)] - N_\sigma[f_{kk_n}(n, x) - f_{kk_m}(m, x)]\} \leqq 0$$

uniformly in respect to k for $1 \leqq k \leqq k_n$, $1 \leqq k \leqq k_m$. Consider at first the case when k is a fixed number. Since

$$N_\sigma[f_{0k}(n, x) - f_{0k}(m, x)] \leqq N_\sigma[f_{0k}(n, x) - f_{0k}(x)] + N_\sigma[f_{0k}(m, x) - f_{0k}(x)] \to 0 \quad \begin{pmatrix} n \to \infty \\ m \to \infty \end{pmatrix},$$

and

$$N_\sigma[f_{0k_n}(n, x) - f_{0k_m}(m, x)] \to 0 \qquad \begin{pmatrix} n \to \infty \\ m \to \infty \end{pmatrix},$$

we obviously have

$$N_\sigma[f_{kk_n}(n, x) - f_{kk_m}(m, x)] \to 0 \qquad \begin{pmatrix} n \to \infty \\ m \to \infty \end{pmatrix}. \tag{12. 2}$$

Hence we get from (12. 1)

$$N_\sigma[F_{kk_n}(n, x) - F_{kk_m}(m, x)] \to 0 \qquad \begin{pmatrix} n \to \infty \\ m \to \infty \end{pmatrix},$$

i. e. $\{F_{kk_n}(n, x)\}$ is Cauchy convergent in the W-norm for fixed k. Owing to Theorem 9. 6 we then obtain

$$F_{kk_n}(n, x) \to F_k^{(2)}(x) \qquad (n \to \infty) \tag{12. 3}$$

with a d. f. $F_k^{(2)}(x)$ for every fixed k.

By the same argument we get

$$F_{0k}(x) \to F^{(1)}(x) \qquad (k \to \infty), \tag{12. 4}$$

and thus

$$F_{0k}(n, x) \to F^{(1)}(x) \qquad (n \to \infty, k \to \infty). \tag{12. 5}$$

Now we apply Lemma 11. 3. Observing that

$$N_\sigma[f_{kk_n}(n, x) - f_{\lambda k_n}(n, x)] = N_\sigma[f_{0\lambda}(n, x) - f_{0k}(n, x)]$$

and the fact that $\{f_{0\cdot}(x)\}$ is Cauchy convergent in the W-norm, we obtain

$$\lim_{\substack{\lambda \to \infty \\ k \to \infty}} \left\{ \lim_{n \to \infty} N_\sigma[f_{kk_n}(n, x) - f_{\lambda k_n}(n, x)] \right\} = 0. \tag{12. 6}$$

Then we get according to Lemma 11. 3

$$\lim_{\substack{\lambda \to \infty \\ k \to \infty}} \left\{ \limsup_{n \to \infty} N_\sigma[F_{kk_n}(n, x) - F_{\lambda k_n}(n, x)] \right\} = 0.$$

Using then (12. 3), we obtain

$$N_\sigma[F_k^{(2)}(x) - F_\lambda^{(2)}(x)] \to 0 \qquad \begin{pmatrix} k \to \infty \\ \lambda \to \infty \end{pmatrix}$$

Hence $\{F_k^{(2)}(x)\}$ is Cauchy convergent in the W-norm, and we get by Theorem 9. 6

$$F_k^{(2)}(x) \to F^{(2)}(x) \qquad (k \to \infty)$$

with a d. f. $F^{(2)}(x)$.

Thus the theorem is proved.

13. Infinitely divisible d. f.'s as limits of convolutions of d. f.'s.

A d. f. $F(x)$ is called infinitely divisible if there, to any positive integer n, corresponds a d. f. $F_n(x)$ such that the n-fold convolution of $F_n(x)$ by itself — notation $F_n^{*n}(x)$ — is equal to $F(x)$. We shall prove in Section 15 that $F_n(x)$ is always uniquely determined by $F(x)$, if $F(x)$ is infinitely divisible.

From now on we consider a C-sequence $\{F_k(n, x)\}$, which is centered in the W-norm and such that $\{f_{0k_n}(n, x)\}$ is Cauchy convergent in the W-norm. We have proved in Section 12 that then

$$(13.1) \qquad F_{kk_n}(n, x) \to F^{(2)}(x) \qquad (n \to \infty,\ k \to \infty)$$

with a d. f. $F^{(2)}(x)$. Now we show that $F^{(2)}(x)$ is infinitely divisible. For that reason we introduce the functions

$$(13.2) \qquad \chi(\lambda, n, x) = \begin{cases} \varepsilon(x) + \dfrac{1}{k_n} f_{\lambda k_n}(n, x) & \text{for } \lambda < k_n, \\ \varepsilon(x) & \text{for } \lambda \geqq k_n, \end{cases}$$

which obviously are d. f.'s. These d. f.'s satisfy the condition

$$(13.3) \qquad N_\sigma[k_n(\chi(\lambda, n, x) - \varepsilon(x))] = k_n N_\sigma[\chi(\lambda, n, x) - \varepsilon(x)]$$
$$= N_\sigma[f_{\lambda k_n}(n, x)] \leqq \sum_{i=1}^{\infty} N_\sigma[F_i(n, x) - \varepsilon(x)].$$

If we define

$$(13.4) \qquad \chi_k(\lambda, n, x) = \begin{cases} \chi(\lambda, n, x) & \text{for } k \leqq k_n, \\ \varepsilon(x) & \text{for } k > k_n, \end{cases}$$

we find by (13.3) that $\{\chi_k(\lambda, n, x)\}$, $k = 1, 2, \ldots$, $n = 1, 2, \ldots$, is a C_0-sequence and that it satisfies the C_0-condition uniformly in respect to λ. Further (13.3) shows that $\{\chi_k(\lambda, n, x)\}$ is centered in the W-norm, uniformly in respect to λ.

We shall now consider convolutions $\chi_{0\varkappa_n}(\lambda, n, x) = \chi^{*\varkappa_n}(\lambda, n, x)$ for non-decreasing sequences of positive integers $\varkappa_n$. To begin with we state

Theorem 13. 1.

$$\chi^{*k_n}(\lambda, n, x) \to F^{(2)}(x) \qquad (n \to \infty,\ \lambda \to \infty).$$

Proof. Observing (13.2) and (13.3) we get by Lemma 11.3

$$N_\sigma[F_{\lambda k_n}(n, x) - \chi^{*k_n}(\lambda, n, x)] \to 0 \qquad (n \to \infty,\ \lambda \to \infty).$$

Regarding then (13.1), we get the theorem from the last relation, according to Theorem 9.5 (compare also the remark at the end of Section 9).

Let $[a]$ denote the largest integer which is smaller than or equal to the real number a.

Theorem 13. 2. *If d is any positive number and $\varkappa_n = \left[\dfrac{k_n}{d}\right]$, then*

$$\chi^{*\varkappa_n}(\lambda, n, x) \to H_d(\lambda, x) \qquad (n \to \infty),$$
$$H_d(\lambda, x) \to H_d(x) \qquad (\lambda \to \infty),$$

where $H_d(\lambda, x)$ and $H_d(x)$ are d. f.'s. (It is $H_1(x) = F^{(2)}(x)$).

Proof. We have

$$k_n = \varkappa_n d + \varrho_n$$

where $0 \leqq \varrho_n < d$. Further we can write

$$(13.5) \qquad \varkappa_n[\chi(\lambda, n, x) - \varepsilon(x)] - \varkappa_m[\chi(\lambda, m, x) - \varepsilon(x)]$$
$$= \frac{1}{d} f_{\lambda k_n}(n, x) - \frac{1}{d} f_{\lambda k_m}(m, x) - \frac{\varrho_n}{k_n d} f_{\lambda k_n}(n, x) + \frac{\varrho_m}{k_m d} f_{\lambda k_m}(m, x).$$

Hence we get for the W-norm

$$(13.6)\quad N_\sigma[\varkappa_n(\chi(\lambda, n, x) - \varepsilon(x)) - \varkappa_m(\chi(\lambda, m, x) - \varepsilon(x))]$$
$$\leqq \frac{1}{d} N_\sigma[f_{\lambda k_n}(n, x) - f_{\lambda k_m}(m, x)] + \frac{1}{k_n} N_\sigma[f_{\lambda k_n}(n, x)] + \frac{1}{k_m} N_\sigma[f_{\lambda k_m}(m, x)].$$

Regarding (13. 3), we find that $N_\sigma[f_{\lambda k_n}(n, x)]$ is uniformly bounded in respect to λ and n (for $\lambda \leqq k_n$). Using then (12. 2), we conclude that the right side of (13. 6) tends to 0 as $\begin{pmatrix} n \to \infty \\ m \to \infty \end{pmatrix}$. Applying Lemma 11. 2, we now obtain

$$N_\sigma[\chi^{*\varkappa_n}(\lambda, n, x) - \chi^{*\varkappa_m}(\lambda, m, x)] \to 0 \qquad \begin{pmatrix} n \to \infty \\ m \to \infty \end{pmatrix},$$

and this relation, according to Theorem 9. 6 implies the convergence

$$(13.7)\qquad \chi^{*\varkappa_n}(\lambda, n, x) \to H_d(\lambda, x) \qquad (n \to \infty)$$

with a d. f. $H_d(\lambda, x)$. Again applying Lemma 11. 2, we get

$$(13.8)\quad \limsup_{n\to\infty} \{N_\sigma[\chi^{*\varkappa_n}(k, n, x) - \chi^{*\varkappa_n}(\lambda, n, x)]$$
$$- \frac{\varkappa_n}{k_n} N_\sigma[f_{k k_n}(n, x) - f_{\lambda k_n}(n, x)]\} \leqq 0,$$

what holds uniformly in respect to k and λ for $1 \leqq k \leqq k_n$, $1 \leqq \lambda \leqq k_n$. (Compare the remark on Lemma 11. 2). Passing first to the limit $n \to \infty$, regarding (13. 7), and then to the limit $\begin{pmatrix} \lambda \to \infty \\ k \to \infty \end{pmatrix}$ regarding (12. 6), we get

$$N_\sigma[H_d(k, x) - H_d(\lambda, x)] \to 0 \qquad \begin{pmatrix} k \to \infty \\ \lambda \to \infty \end{pmatrix}$$

i. e. the sequence $\{H_d(k, x)\}$ is Cauchy convergent in the W-norm and then

$$H_d(k, x) \to H_d(x) \qquad (k \to \infty)$$

with a d. f. $H_d(x)$. Thus the theorem is proved.

In order to study $H_d(x)$ for large d, we shall use

Theorem 13. 3. *Let $\{\varrho_n(d)\}$ be a sequence of integers such that $\varrho_n(d) \leqq k_n$, and*

$$\frac{\varrho_n(d)}{k_n} \to 0 \qquad \begin{pmatrix} n \to \infty \\ d \to \infty \end{pmatrix},$$

then we have

$$\chi^{*\varrho_n(d)}(\lambda, n, x) \to \varepsilon(x) \qquad \begin{pmatrix} n \to \infty \\ d \to \infty \end{pmatrix},$$

and this holds uniformly in respect to λ for $1 \leqq \lambda \leqq k_n$.

Corollary. $H_d(x) \to \varepsilon(x)$ $(d \to \infty)$.

Proof. Applying Lemma 11. 2 we get

$$\limsup_{n\to\infty} \{N_\sigma[\chi^{*\varrho_n(d)}(\lambda, n, x) - \varepsilon^{*\varrho_n(d)}(x)] - \frac{\varrho_n(d)}{k_n} N_\sigma[f_{\lambda k_n}(n, x)]\} \leqq 0,$$

and this holds uniformly in respect to k and d. (Compare the remark on Lemma 11. 2). From the last relation we obtain

$$N_\sigma[\chi^{*\varrho_n(d)}(\lambda, n, x) - \varepsilon(x)] \to 0 \qquad \begin{pmatrix} n \to \infty \\ d \to \infty \end{pmatrix}$$

uniformly in respect to λ. Applying Theorem 9. 6 (compare also the remark at the end of Section 9), we get Theorem 13. 3. The corollary is obvious.

Theorem 13. 4. *$F^{(2)}(x)$ is infinitely divisible.*

Proof. Let d be any positive integer, $\varkappa_n = \left[\frac{k_n}{d}\right]$ and $k_n = \varkappa_n d + \varrho_n$. Then we have the identity

$$\chi^{*k_n}(\lambda, n, x) = [\chi^{*\varkappa_n}(\lambda, n, x)]^{*d} * \chi^{*\varrho_n}(\lambda, n, x).$$

Passing to the limits $n \to \infty$ and $\lambda \to \infty$ in order and regarding the Theorems 13. 1, 13. 2, 13. 3 and 9. 7 we obtain, first

$$H_1(\lambda, x) = H_d^{*d}(\lambda, x),$$

and then

$$F^{(2)}(x) = H_1(x) = H_d^{*d}(x).$$

Thus Theorem 13. 4 is proved.

14. Some necessary conditions for the convergence of convolutions of d. f.'s.

When we here consider sequences $\{F_k(n, x)\}$ of d. f.'s, we define $F_k(n, x) = \varepsilon(x)$ for $k > k_n$. We state

Theorem 14. 1. *If all $F_k(n, x)$ are symmetric and $F_{0k_n}(n, x)$ tends to a d. f. as $n \to \infty$ then we have the following estimations*

$$1^0 \qquad \limsup_{n\to\infty} |f_{0k_n}(n, x)| \begin{cases} < \infty & \text{for } x \neq 0, \\ \to 0 & |x| \to \infty, \end{cases}$$

$$2^0 \qquad \limsup_{n\to\infty} \int_{|x| \leq \eta} x^2 df_{0k_n}(n, x) < \infty \text{ for } \eta < \infty,$$

and $\{F_k(n, x)\}$ is centered in the W-norm.

Corollary. *If $\{F_k(n, x)\}$ is a C-sequence ($F_k(n, x)$ not necessarily symmetric) and if $F_{0k_n}(n, x + A_n)$ tends weakly to a d. f. for suitable constants A_n as $n \to \infty$, then 1^0 still holds. If furthermore $\{F_k(n, x)\}$ is centered, then it is centered in the W-norm.*

Proof. We apply the identity (11. 1) to the convolutions $\varepsilon(x) = \varepsilon^{*k_n}(x)$ and $F_{0k_n}(n, x)$. Then we obtain

$$(14.\ 1) \qquad \varepsilon(x) - F_{0k_n}(n, x) = \sum_{k=1}^{k_n} [\varepsilon(x) - F_k(n, x)] * F_{kk_n}(n, x).$$

Denoting the Weierstrass transform of $F_{kk_n}(n, x)$ by $F_{kk_n}(n, \sigma, x)$, and observing that all d. f.'s to be considered are symmetric, we get

$$[\varepsilon(x) - F_k(n, x)] * F_{kk_n}(n, \sigma, x) = \int_{-\infty}^{\infty} F_{kk_n}(n, \sigma, x - t)\, d[\varepsilon(t) - F_k(n, t)]$$

$$= \int_0^{\infty} [2F_{kk_n}(n, \sigma, x) - F_{kk_n}(n, \sigma, x - t) - F_{kk_n}(n, \sigma, x + t)]\, dF_k(n, t).$$

We easily verify the relation

$$(14.\ 2) \quad 2F_{kk_n}(n, \sigma, x) - F_{kk_n}(n, \sigma, x - t) - F_{kk_n}(n, \sigma, x + t) = k\left(\frac{x}{\sigma}, \frac{t}{\sigma}\right) * F_{kk_n}(n, x),$$

where $k(x, t)$ is defined by (8. 2). The Weierstrass transform of the identity (14. 1) may then be given in the form

$$(14.\ 3) \quad \Phi\left(\frac{x}{\sigma}\right) - F_{0k_n}(n, \sigma, x) = \sum_{k=1}^{k_n} \int_0^{\infty} \left[k\left(\frac{x}{\sigma}, \frac{t}{\sigma}\right) * F_{kk_n}(n, x)\right] dF_k(n, t),$$

We shall show that x and σ may be chosen such that the function (14. 2) is non-negative for all $t \geqq 0$, when n is sufficiently large.

For arbitrary d. f.'s $G(x)$ and $H(x)$ and $x \geqq 0$ we have

$$(14.\ 4)\quad 1 - G(x) * H(x) = \int_{-\infty}^{\infty} [1 - G(x-t)]\, dH(t) \geqq [1 - G(2x)] \int_{-x}^{\infty} dH(t),$$

and thus, if $H(x)$ is symmetric,

$$1 - G(2x) \leqq 2[1 - G(x) * H(x)].$$

Hence we get

$$(14.\ 5)\qquad 1 - F_{kk_n}(n, x) \leqq 2\left[1 - F_{0k_n}\left(n, \frac{x}{2}\right)\right].$$

Let now $F_{0k_n}(n, x)$ converge weakly to a d. f. $F(x)$. Then, to any given positive numbers ε_0 and ϱ, we can choose σ sufficiently large and then $n_0(\varepsilon_0, \varrho\sigma)$ so large that

$$1 - F_{0k_n}\left(n, \frac{x}{2}\right) < \frac{\varepsilon_0}{2}$$

for $x \geqq \varrho\sigma$, $n > n_0(\varepsilon_0, \varrho\sigma)$. Hence we obtain by (14. 5)

$$(14.\ 6)\qquad F_{kk_n}(n, x) > 1 - \varepsilon_0$$

for $x \geqq \varrho\sigma$, $n > n_0(\varepsilon_0, \varrho\sigma)$.

Any d. f.'s $G(x)$ and $H(x)$ also satisfy the inequality

$$G(x) * H(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x-t)\, dH(t) \geqq G\left(\frac{x}{2}\right) \int_{-\infty}^{x/2} dH(t) = G\left(\frac{x}{2}\right) H\left(\frac{x}{2}\right).$$

Hence we get from (14. 6) for $x \geqq 2\varrho\sigma$, $n > n_0(\varepsilon_0, \varrho\sigma)$

$$F_{kk_n}(n, \sigma, x) > (1 - \varepsilon_0)\, \Phi(\varrho).$$

Now we assume that we have choosen ϱ so large that $\Phi(\varrho) > 1 - \frac{1}{16}$ and ε_0 so small that $\varepsilon_0 < \frac{1}{16}$. Then, for $1 \leqq k \leqq k_n$, $x \geqq 2\varrho\sigma$, $n > n_0(\varepsilon_0, \varrho\sigma)$, we obtain

$$F_{kk_n}(n, \sigma, x) > 1 - \frac{2}{16} = \frac{7}{8},$$

and by (14. 2) for $t \geqq x \geqq 2\varrho\sigma$

$$(14.\ 7)\qquad k\left(\frac{x}{\sigma}, \frac{t}{\sigma}\right) * F_{kk_n}(n, x) > 2\,\frac{7}{8} - \frac{1}{2} - 1 = \frac{1}{4}.$$

Consider the function (14. 2) for $0 \leqq t \leqq 2\varrho\sigma$, $x = 2\varrho\sigma$. We always have (compare section 8)

$$k\left(\frac{x}{\sigma}, \frac{t}{\sigma}\right) \leqq \frac{t^2}{\sigma^2}\, |\Phi''(1)|$$

and by (8. 4), for $\varrho\sigma \leqq x \leqq 3\varrho\sigma$, $0 \leqq t \leqq \frac{\varrho\sigma}{2}$, $\varrho \geqq 2$,

$$k\left(\frac{x}{\sigma}, \frac{t}{\sigma}\right) \geqq \frac{t^2}{\sigma^2} \left|\Phi''\left(\frac{7\varrho}{2}\right)\right|.$$

Since $k(x, t)$ is an increasing function of t for $t > 0$, $x > 0$, we thus surely have

$$k\left(\frac{x}{\sigma}, \frac{t}{\sigma}\right) \geqq \frac{t^2}{16\sigma^2} \left| \Phi''\left(\frac{7\varrho}{2}\right)\right|$$

for $\varrho\sigma \leqq x \leqq 3\varrho\sigma$, $0 \leqq t \leqq 2\varrho\sigma$, $\varrho \geqq 2$. Then, for $x = 2\varrho\sigma$, we obtain

$$k\left(\frac{x}{\sigma}, \frac{t}{\sigma}\right) * F_{kk_n}(n, x) = \int_{-\infty}^{\infty} k\left(\frac{x-\xi}{\sigma}, \frac{t}{\sigma}\right) dF_{kk_n}(n, \xi)$$

$$\geqq \frac{t^2}{16\sigma^2} \left| \Phi''\left(\frac{7\varrho}{2}\right)\right| \int_{|\xi| \leqq \varrho\sigma} dF_{kk_n}(n, \xi) - \frac{t^2}{\sigma^2} \left| \Phi''(1) \right| \int_{|\xi| \geqq \varrho\sigma} dF_{kk_n}(n, \xi),$$

and according to (14. 6),

$$k\left(\frac{x}{\sigma}, \frac{t}{\sigma}\right) * F_{kk_n}(n, x) > \frac{c(\varrho)}{\sigma^2} t^2 \tag{14. 8}$$

with

$$c(\varrho) = \frac{1}{16} \left| \Phi''\left(\frac{7\varrho}{2}\right)\right| (1 - 2\varepsilon_0) - 2\varepsilon_0 \left| \Phi''(1) \right|$$

for $x \geqq 2\varrho\sigma$, $0 \leqq t \leqq 2\varrho\sigma$, $n > n_0(\varepsilon_0, \varrho\sigma)$, $1 \leqq k \leqq k_n$.

To given ϱ, satisfying the conditions $\Phi(\varrho) > 1 - \frac{1}{16}$, $\varrho \geqq 2$, we choose $\varepsilon_0 < \frac{1}{16}$ so small that $c(\varrho) > 0$. Then the function (14. 2) is non-negative for all $t \geqq 0$, when $1 \leqq k \leqq k_n$, $x = 2\varrho\sigma$, $n > n_0(\varepsilon_0, \varrho\sigma)$. Passing to the limit $n \to \infty$ and observing that $F_{0k_n}(n, x) \to F(x)$ as $n \to \infty$, we find by Theorem 9. 7 that $F_{0k_n}(n, x) \to F(\sigma, x)$ as $n \to \infty$. Using the inequalities (14. 7) and (14. 8) we get from (14. 3)

$$\left| \Phi(2\varrho) - F(\sigma, 2\varrho\sigma) \right| \geqq \frac{1}{4} \limsup_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \int_{2\varrho\sigma}^{\infty} dF_k(n, t), \tag{14. 9}$$

$$\left| \Phi(2\varrho) - F(\sigma, 2\varrho\sigma) \right| \geqq \frac{c(\varrho)}{\sigma^2} \limsup_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \int_{0}^{2\varrho\sigma} t^2 dF_k(n, t). \tag{14. 10}$$

These two inequalities imply the inequalities 1° and 2° of Theorem 14. 1. Observing that the d. f.'s are symmetric, we then find by 3° of Lemma 8. 1 that $\{F_k(n, x)\}$ is centered in the W-norm.

In order to prove the corollary, we remark that the weak convergence of $F_{0k_n}(n, x + A_n)$ to a d. f. $F(x)$ implies the convergence of $\overline{F_{0k_n}(n, x + A_n)}$ to $\overline{F(x)}$ and thus the weak convergence of $F_{0k_n}(n, x + A_n) * \overline{F_{0k_n}(n, x + A_n)} = F_{0k_n}(n, x) * \overline{F_{0k_n}(n, x)}$ to $F(x) * \overline{F(x)}$. Then the sequence $\{F_k(n, x) * \overline{F_k(n, x)}\}$ satisfies the conditions of Theorem 14. 1. For a C-sequence $\{F_k(n, x)\}$ there exist positive numbers $k_0(x)$ and $n_0(x)$ to any number $x > 0$ such that

$$F_k(n, x) > \tfrac{1}{2}, \quad \overline{F_k(n, x)} > \tfrac{1}{2}$$

for $k > k_0(x)$, $n > n_0(x)$. Using (14. 4), we thus obtain for $x > 0$, $k > k_0(x)$, $n > n_0(x)$,

$$1 - F_k(n, 2x) \leqq 2[1 - F_k(n, x) * \overline{F_k(n, x)}],$$
$$1 - \overline{F_k(n, 2x)} \leqq 2[1 - F_k(n, x) * \overline{F_k(n, x)}].$$

Since 1° of Theorem 14. 1 is satisfied for the sequence $\{F_k(n, x) * \overline{F_k(n, x)}\}$ we find by the last inequalities that it also holds for the sequence $\{F_k(n, x)\}$.

For the proof of the second statement of the Corollary of Theorem 14. 1 we shall use the following inequality, which holds for any d. f.'s $G(x)$ and $H(x)$,

$$(14.\ 11)\quad \int_{|x|\leq\xi} x^2 d[G(x) * H(x)] \geqq \int_{|x|\geqq\xi/2} x^2 dG(x) \int_{|x|\geqq\xi/2} dH(x) + \int_{|x|\geqq\xi/2} x^2 dH(x) \int_{|x|\geqq\xi/2} dG(x) + 2 \int_{|x|\geqq\xi/2} x dG(x) \int_{|x|\geqq\xi/2} x dH(x).$$

It is sufficient to prove this inequality for Weierstrass transforms of d. f.'s, for if it is true for Weierstrass transforms of d. f.'s then it is also true for the d. f.'s themselves, what follows by Corollary 1 of Lemma 5. 1. Weierstrass transforms of d. f.'s, however, have continuous derivatives of all orders, and for d. f.'s having continuous derivatives we obviously get, according to well-known properties of Riemann integrals,

$$\int_{|x|\geqq\xi} x^2 d[G(x) * H(x)] = \iint_{|t+u|\leq\xi} (t+u)^2 G'(t)\, H'(u)\, dt\, du \geqq \iint_{\substack{|t|\geqq\xi/2\\ |u|\geqq\xi/2}} (t+u)^2 G'(t)\, H'(u)\, dt\, du$$

$$= \int_{|t|\geqq\xi/2} t^2 G'(t)\, dt \int_{|u|\geqq\xi/2} H'(u)\, du + 2 \int_{|t|\geqq\xi/2} t G'(t)\, dt \int_{|u|\geqq\xi/2} u H'(u)\, du + \int_{|u|\geqq\xi/2} u^2 H'(u)\, du \int_{|t|\geqq\xi/2} G'(t)\, dt.$$

Now we choose the positive integers $k_0 = k_0(\xi)$ and $n_0 = n_0(\xi)$ so large that

$$\int_{|x|\geqq\xi/2} dF_k(n, x) > \frac{1}{2}$$

for $n > n_0(\xi)$, $k > k_0(\xi)$. Putting $G(x) = F_k(n, x)$, $H(x) = \overline{F_k(n, x)}$ for $k = k_0 + 1, \ldots, k_n$, and adding the corresponding inequalities (14. 11), we easily obtain

$$\sum_{k=k_0+1}^{k_n} \int_{|x|\geqq\xi/2} x^2 dF_k(n, x) \leqq \sum_{k=k_0+1}^{k_n} \int_{|x|\leq\xi} x^2 d[F_k(n, x) * \overline{F_k(n, x)}] + \xi \sum_{k=k_0+1}^{k_n} \left| \int_{|x|\geqq\xi/2} x dF_k(n, x) \right|.$$

Since 2° of Theorem 14. 1 holds for the sequence $\{F_k(n, x) * \overline{F_k(n, x)}\}$ and $\{F_k(n, x)\}$ is centered, we find by the last inequality that 2° also holds for the sequence $\{F_k(n, x)\}$, and then by 3° of Lemma 8. 1 that $\{F_k(n, x)\}$ is centered in the W-norm.

15. A uniqueness theorem for infinitely divisible d. f.'s.

In our analysis of distribution functions, we are using the Weierstrass transform and the Weierstrass norm. We shall use the Fourier transform, however, in the proof of a uniqueness theorem. Then we shall need only the very definition of the Fourier transform and some of its simplest properties.

The Fourier transform, also called the characteristic function, of a d. f. $F(x)$ is defined by

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF(x).$$

This integral exists, since e^{itx} is continuous.

It is easily seen that $f(t)$ is uniformly continuous and $|f(t)| \leqq 1$.

Theorem 15. 1. *If $F_1(x)$ and $F_2(x)$ are d. f.'s with the characteristic functions $f_1(t)$ and $f_2(t)$ respectively, then $f_1(t)\, f_2(t)$ is the characteristic function of $F_1(x) * F_2(x)$.*

Proof. Putting $F_{02}(x) = F_1(x) * F_2(x)$ and assuming that $F_1(x)$ and $F_2(x)$ have continuous derivatives of the first order, we get, according to well-known properties of the Riemann integral,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} F'_{02}(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dx \int_{-\infty}^{\infty} F'_1(x-\xi)\, F'_2(\xi)\, d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\xi+\eta)t} F'_1(\xi)\, F'_2(\eta)\, d\xi\, d\eta$$

$$= \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{it\xi} dF_1(\xi)\right] \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{it\eta} dF_2(\eta)\right].$$

This relation proves the theorem in our special case. Thus it generally holds if $F_1(x)$ and $F_2(x)$ are changed against their Weierstrass transforms. But then we find by corollary 1 of Lemma 5. 1 and the relation above, that it also holds for $F_1(x)$ and $F_2(x)$ themselves.

Theorem 15. 2. *If $F_1(x)$ and $F_2(x)$ are d. f.'s with the characteristic functions $f_1(t)$ and $f_2(t)$, and if $f_1(t) = f_2(t)$ then $F_1(x) = F_2(x)$.*

Proof[12]. We first prove the theorem in that special case, when $F_1(x)$ and $F_2(x)$ have continuous derivatives of the first order for all x.

Let r be any real number and put $F'_1(x+r) - F'_2(x+r) = \varphi(x)$. The relation $f_1(t) = f_2(t)$ then implies

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \varphi(x)\, dx = e^{-irt}[f_1(t) - f_2(t)] = 0.$$

Integrating this relation in respect to t over the interval $(-\xi, \xi)$ and observing that the order of integration may be inversed, we get

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \xi x}{x} \varphi(x) dx = 0 \quad \text{for all } \xi.$$

Integrating the last relation in respect to ξ over the interval $(0, h)$, we obtain in the same way

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-\cos hx}{x^2} \varphi(x)\, dx = 0 \quad \text{for all } h.$$

Changing hx to x, we thus get

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-\cos x}{x^2} \varphi\left(\frac{x}{h}\right) dx = 0.$$

Since h may be any value we can pass to the limit $h \to \infty$. Then we get

$$\left| \int_{|x| > h^{2/3}} \frac{1-\cos x}{x^2} \varphi\left(\frac{x}{h}\right) dx \right| \leqq \frac{2h}{h^{4/3}} \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x)|\, dx \to 0 \qquad (h \to \infty),$$

and

$$\int_{|x| < h^{2/3}} \frac{1-\cos x}{x^2} \varphi\left(\frac{x}{h}\right) dx \to \varphi(0) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-\cos x}{x^2} dx \qquad (h \to \infty).$$

[12]) We could apply the inversion theorem of the Fourier transform, but our direct proof is more elementary.

Thus

$$\varphi(0) = F_1'(r) - F_2'(r) = 0.$$

This holds for any r, and then $F_1(x) = F_2(x)$.

If $F_1(x)$ and $F_2(x)$ are any d. f.'s and their characteristic functions are identical, their Weierstrass transforms $F_1(\sigma, x)$ and $F_2(\sigma, x)$ have also identical characteristic functions, according to Theorem 15. 1. Then, by the just given proof, we have $F_1(\sigma, x) = F_2(\sigma, x)$. Passing to the limit $\sigma \to +0$ we get $F_1(x) = F_2(x)$.

From now on we consider infinitely divisible d. f.'s.

Theorem 15. 3. *If $F(x)$ is infinitely divisible and $F(x) = F_n^{*n}(x)$ then $F_n(x)$ is uniquely determined by $F(x)$ and n.*

Proof. Let the characteristic functions of $F_n(x)$ and $F(x)$ be $f_n(t)$ and $f(t)$ respectively. The relation $F(x) = F_n^{*n}(x)$ implies the relation $f(t) = f_n^n(t)$. Now the equation

$$x^n = f(t)$$

has the roots

$$x_k(t) = |f(t)|^{1/n} e^{i[\alpha(t)+2k\pi]/n}$$

when $\alpha(t) = \arg f(t)$, $0 \leqq \alpha(t) \leqq 2\pi$, $k = 0, 1, \ldots n-1$. $f_n(t)$ is equal to some $x_k(t)$ for every t and since it is continuous it can pass from one $x_k(t)$ to another $x_k(t)$ only in the points where $f(t) = 0$. Thus the theorem follows if we prove that $f(t) \neq 0$ for all t. (It is then $f_n(t) = x_0(t)$ since $f_n(0) = 1$.)

Obviously, $F(x)$ is the limit of a sequence $F_n^{*n}(x)$ as $n \to \infty$. Then putting $G(x) = F(x) * \overline{F(x)}$, $G_n(x) = F_n(x) * \overline{F_n(x)}$, we have also

$$G_n^{*n}(x) \to G(x) \qquad (n \to \infty).$$

By 1° of Theorem 14. 1 we get

$$1 - G_n(x) \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

for every fixed $x > 0$. The characteristic function of $G_n(x)$ is equal to

$$g_n(t) = 2 \int_0^\infty \cos xt \, dG_n(x). \tag{15. 1}$$

Assuming that $f(t_0) = 0$ for some t_0, we should get $g(t_0) = f(t_0)\overline{f(t_0)} = 0$, and, using the relation $g_n^n(t) = g(t)$, $g_n(t_0) = 0$ for any n. Further we should have $t_0 \neq 0$ since $f(0) = 1$. We may assume that $t_0 > 0$. Let now $\eta > 0$ be so small that

$$1 - \cos t_0 x < \frac{1}{4} \quad \text{for } 0 \leqq x \leqq \eta$$

and n so large that

$$1 - G_n(\eta) < \frac{1}{8}.$$

Then we get from (15. 1)

$$g_n(t_0) = 2 \int_0^\infty dG_n(x) - 2 \int_0^\infty [1 - \cos t_0 x] \, dG_n(x) \geqq 1 - \frac{1}{4} - \frac{4}{8} = \frac{1}{4},$$

what contradicts the made assumption $f(t_0) = 0$. Hence we conclude that $f(t)$ never vanishes, and our theorem is proved.

16. On the uniqueness of convolution limits.

When we consider d. f.'s given as limits of convolutions, we want to know if any two convolutions, when converging weakly, converge to the same limit.

In this section we always assume that $\{F_k(n, x)\}$ and $\{G_k(n, x)\}$ are centered C-sequences and that $\{f_{0k'_n}(n, x)\}$ and $\{g_{0k''_n}(n, x)\}$ are Cauchy convergent in the W-norm for sequences $\{k'_n\}$ and $\{k''_n\}$ of positive non-decreasing integers k'_n and k''_n tending to ∞ as $n \to \infty$. Then we know by Theorem 12. 2 that the limits

$$\begin{matrix} F_{0k}(n, x) \to F^{(1)}(x), \; F_{lk'_n}(n, x) \to F^{(2)}(x) \\ G_{0k}(n, x) \to G^{(1)}(x), \; G_{lk''_n}(n, x) \to G^{(2)}(x) \end{matrix} \qquad \begin{pmatrix} n \to \infty \\ k \to \infty \end{pmatrix}$$

exist with d. f.'s $F^{(1)}(x)$, $F^{(2)}(x)$, $G^{(1)}(x)$ and $G^{(2)}(x)$. If (compare the C-condition) $F_k(x) = G_k(x)$ for every k, we obviously have $F^{(1)}(x) = G^{(1)}(x)$. In other cases it may be more difficult to answer the question if $F^{(1)}(x)$ and $G^{(1)}(x)$ are equal or not. We shall not consider this problem here.

For comparing $F^{(2)}(x)$ and $G^{(2)}(x)$ we have the following theorem.

Theorem 16. 1. *It is $F^{(2)}(x) = G^{(2)}(x)$ if and only if*

1° $$N_\sigma[f_{kl'_n}(n, x) - g_{kk''_n}(n, x)] \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

Remark: The weak limits

$$f_{kk'_n}(n, x) \to f^{(2)}(x), \int\limits_{|x| \leq \eta} x^\nu df_{kk'_n}(n, x) \to \alpha_\nu^{(2)}(\eta)$$
$$g_{kk''_n}(n, x) \to g^{(2)}(x), \int\limits_{|x| \leq \eta} x^\nu dg_{kl'_n}(n, x) \to \beta_\nu^{(2)}(\eta)$$

as $n \to \infty$, $k \to \infty$ exist for $\nu = 1, 2$ where $f^{(2)}(x)$ and $g^{(2)}(x)$ are normal q. d. f.'s and $\alpha_\nu^{(2)}(\eta)$, $\beta_\nu^{(2)}(\eta)$ are finite for finite η. It is $F^{(2)}(x) = G^{(2)}(x)$ if and only if $f^{(2)}(x) = g^{(2)}(x)$ and $\alpha_\nu^{(2)}(\eta) = \beta_\nu^{(2)}(\eta)$ $(\nu = 1, 2)$ for all η such that $\pm \eta$ are continuity points of $f^{(2)}(x)$. If $f^{(2)}(x) = g^{(2)}(x)$ and $\alpha_\nu^{(2)}(\eta) = \beta_\nu^{(2)}(\eta)$ for some $\eta > 0$ such that $\pm \eta$ are continuity points of $f^{(2)}(x)$, then the last relation holds for all such points η.

Proof. We may define $F_k(n, x) = \varepsilon(x)$ for $k > k'_n$ and $G_k(n, x) = \varepsilon(x)$ for $k > k''_n$. Putting $k_n = \max(k'_n, k''_n)$ for every n, we can obviously change k'_n and k''_n against k_n without changing $f_{kk'_n}(n, x)$, $F_{kk'_n}(n, x)$, $g_{kl''_n}(n, x)$ or $G_{kl''_n}(n, x)$. Thus it is sufficient to prove the theorem for $k'_n = k''_n = k_n$.

If 1° is satisfied we easily find by lemma 11. 3 that

$$N_\sigma[F_{kk_n}(n, x) - G_{kk_n}(n, x)] \to 0 \qquad (n \to \infty, \; k \to \infty), \tag{16. 1}$$

since $\{F_k(n, x)\}$ and $\{G_k(n, x)\}$ obviously are centered in the W-norm, when $f_{0k'_n}(n, x)$ and $g_{0k''_n}(n, x)$ are Cauchy convergent in the W-norm. By theorem 9. 5 (compare also the remark at the end of section 9) we get from (16. 1)

$$F^{(2)}(x) = G^{(2)}(x). \tag{16. 2}$$

Conversely if (16. 2) holds then (16. 1) is satisfied, according to theorem 9. 5. Let now $F^{(2)}(x)$, $\chi(k, n, x)$, $H_k(d, x)$ and $H_d(x)$ belong to the sequence $\{F_k(n, x)\}$ as in section 13

and let $G^{(2)}(x)$, $\mathring{\chi}(k, n, x)$, $\mathring{H}_k(d, x)$ and $\mathring{H}_d(x)$ be the corresponding quantities for the sequence $\{G_k(n, x)\}$. Then, for $\varkappa_n = \left[\frac{k_n}{d}\right]$, we have the following relations, given in section 13,

$$\chi^{*\varkappa_n}(k, n, x) \to H_d(x), \quad \mathring{\chi}^{*\varkappa_n}(k, n, x) \to \mathring{H}_d(x) \qquad (n \to \infty,\ k \to \infty)$$

and

$$H_d^{*d}(x) = \mathring{H}_d^{*d}(x) = F^{(2)}(x) = G^{(2)}(x).$$

According to theorem 15. 3, the last relation implies $H_d(x) = \mathring{H}_d(x)$. Thus, by theorem 9. 5 (compare the remark at the end of section 9), we have

$$(16.\ 3) \qquad N_\sigma[\chi^{*\varkappa_n}(k, n, x) - \mathring{\chi}^{*\varkappa_n}(k, n, x)] \to 0 \qquad (n \to \infty,\ k \to \infty).$$

Now we use the following identities, which are immediately proved

$$(16.\ 4) \qquad \chi^{*\varkappa_n} - \mathring{\chi}^{*\varkappa_n} = (\chi - \mathring{\chi}) * \sum_{\nu=0}^{\varkappa_n - 1} \chi^{*\varkappa_n - \nu - 1} * \mathring{\chi}^{*\nu}$$

$$= \varkappa_n(\chi - \mathring{\chi}) + \varkappa_n(\chi - \mathring{\chi}) * (W_n - \varepsilon(x)),$$

$$W_n = \frac{1}{\varkappa_n} \sum_{\nu=0}^{\varkappa_n - 1} \chi^{*\varkappa_n - \nu - 1} * \mathring{\chi}^{*\nu}.$$

Obviously W_n is a d. f. Hence we get from 16. 4, observing that

$$k_n(\chi - \mathring{\chi}) = f_{kk_n}(n, x) - g_{kk_n}(n, x),$$

$$(16.\ 5) \qquad N_\sigma[f_{kk_n}(n, x) - g_{kk_n}(n, x)] = k_n N_\sigma[(\chi - \mathring{\chi})]$$

$$\leqq \frac{k_n}{\varkappa_n} N_\sigma[\chi^{*\varkappa_n} - \mathring{\chi}^{*\varkappa_n}] + N_\sigma[k_n(\chi - \mathring{\chi}) * (W_n - \varepsilon(x))].$$

According to (16. 3), the first term on the right side of the inequality tends to 0 for any positive integer d as $n \to \infty$, $k \to \infty$. Using the properties of the W-norm and applying theorem 8. 1, we further get

$$(16.\ 6) \qquad N_\sigma[k_n(\chi - \mathring{\chi}) * (W_n - \varepsilon(x))]$$

$$\leqq N_\sigma[f_{kk_n} * (W_n - \varepsilon(x))] + N_\sigma[g_{kk_n} * (W_n - \varepsilon(x))]$$

$$\leqq c\,\{N_\sigma[g_{kk_n}] + N_\sigma[f_{kk_n}]\}\, N_\sigma[W_n - \varepsilon(x)]$$

with an absolute constant c. Obviously we have

$$W_n - \varepsilon(x) = \frac{1}{\varkappa_n} \sum_{\nu=0}^{\varkappa_n} \{(\chi^{*\varkappa_n - \nu - 1} - \varepsilon(x)) * \mathring{\chi}^{*\nu} + (\mathring{\chi}^{*\nu} - \varepsilon(x))\}$$

and thus

$$N_\sigma[W_n - \varepsilon(x)] \leqq \frac{1}{\varkappa_n} \sum_{\nu=1}^{\varkappa_n} \{N_\sigma[\chi^{*\varkappa_n - \nu - 1} - \varepsilon(x)] + N_\sigma[\mathring{\chi}^{*\nu} - \varepsilon(x)]\}.$$

Applying theorem 13. 3 to this inequality, we get

$$N_\sigma[W_n - \varepsilon(x)] \to 0 \qquad \begin{pmatrix} n \to \infty \\ d \to \infty \end{pmatrix}.$$

Then the left side of (16. 6) tends to 0 as $n \to \infty$, $d \to \infty$, and the left side of (16. 5) tends to 0 as $n \to \infty$, $k \to \infty$. Thus theorem 16. 1 is proved.

We get the statements in the remark on the theorem in the following way.

Since $\{f_{0k_n}(n, x)\}$ is Cauchy convergent in the W-norm, the limits

$$f_{0k_n}(n, x) \to f(x) \in Q, \quad \int\limits_{|x| \leq y} x^\nu df_{0k_n}(n, x) \to \alpha_\nu(y) \qquad (n \to \infty)$$

exist according to theorem 9. 3, and, by theorem 9. 1, the limits

$$f_{0k}(n, x) \to f^{(1)}(x) \in Q, \quad \int\limits_{|x| \leq \eta} x^\nu df_{0k}(n, x) \to \alpha_\nu^{(1)}(\eta) \qquad (n \to \infty,\ k \to \infty)$$

also exist. Observing that

$$f_{kk_n}(n, x) = f_{0k_n}(n, x) - f_{0k}(n, x),$$

we then obviously get

$$f_{kk_n}(n, x) \to f^{(2)}(x) = f(x) - f^{(1)}(x) \in Q,$$

$$\int\limits_{|x| \leq \eta} x^\nu df_{kk_n}(n, x) \to \alpha_\nu(\eta) - \alpha_\nu^{(1)}(\eta) \qquad (n \to \infty,\ k \to \infty).$$

As in the proof of theorem 9. 1 we find that

$$\int\limits_{|x| \leq \eta} x^\nu df_{kk_n}(n, x) \to \alpha_\nu^{(2)}(\eta) \qquad (n \to \infty,\ k \to \infty)$$

holds for all such η that $\pm \eta$ are continuity points of $f^{(2)}(x)$, if it is true for some such η and if $f_{kk_n}(n, x) \to f^{(2)}(x) \in Q$ $(n \to \infty,\ k \to \infty)$. Using now theorem 9. 3, we get the remaining statements of the remark.

17. Necessary and sufficient conditions for the convergence of convolutions of centered C-sequences.

Theorem 17. 1. *Let $\{F_k(n, x)\}$ be a centered C-sequence. Then*

1° $\quad F_{0k}(n, x) \to F^{(1)}(x), \quad F_{1k_n}(n, x) \to F^{(2)}(x) \qquad (n \to \infty,\ k \to \infty)$

if, and only if $\{f_{0k_n}(n, x)\}$ is Cauchy convergent in the W-norm (QM-convergent).

Proof. If $\{f_{0k_n}(n, x)\}$ is Cauchy-convergent in the W-norm it is QM-convergent, according to Theorem 9. 4. Since it is also centered, we easily find by 3° of Lemma 8. 1 that $\{F_k(n, x)\}$ is centered in the W-norm, and by Theorem 12. 1 that the relations 1° are satisfied.

Conversely, let these conditions be satisfied. Then, according to Theorem 9. 7, we have

$$F_{0k_n}(n, x) \to F^{(1)}(x) * F^{(2)}(x) \qquad (n \to \infty).$$

Applying then the corollary of Theorem 14. 1, we get the inequalities

$$\limsup_{n \to \infty} |f_{0k_n}(n, x)| \begin{cases} < \infty \text{ for } x \neq 0, \\ \to 0 \quad |x| \to \infty, \end{cases} \tag{17. 1}$$

$$\limsup_{n \to \infty} \int\limits_{|x| \leq \eta} x^2 df_{0k_n}(n, x) < \infty \text{ for } \eta < \infty. \tag{17. 2}$$

Since $\{F_k(n, x)\}$ is centered, we surely have

$$\limsup_{n \to \infty} \left| \int\limits_{|x| \leq \eta} x df_{0k_n}(n, x) \right| < \infty \text{ for } \eta < \infty. \tag{17. 3}$$

Then, proceeding as in the proof of Theorem 9. 4, from the sequence N of positive integers we select a sub-sequence $\bar{N}$ such that $\{f_{0k_n}(n, x)\}$ is QM-convergent when n passes to ∞ through $\bar{N}$. It may be observed that the existence of a sub-sequence $\bar{N}$ such that $f_{0k_n}(n, x)$ and its truncated moments of the first and second order tend to weak limits $f(x)$, $\alpha_1(\eta)$ and $\alpha_2(\eta)$ respectively when $n \to \infty$ through $\bar{N}$, only depends on the inequalities above. We find by (17. 1) that $f(x)$ necessarily is a normal q. d. f.

Now we prove the rest of Theorem 17. 1 indirectly. If N would contain a sub-sequence, such that $f_{0k_n}(n, x_0) \to g \neq f(x_0)$ for a continuity point x_0 of $f(x)$, when n passes to ∞ through this sub-sequence, from this sub-sequence we could select a sub-sequence $\bar{\bar{N}}$ such that $\{f_{0k_n}(n, x)\}$ were QM-convergent, when n passes to ∞ through $\bar{\bar{N}}$, and then $f_{0k_n}(n, x_0) \to g \neq f(x_0)$, as $n \to \infty$ through $\bar{\bar{N}}$. This, however, is impossible, since $\{f_{0k_n}(n, x)\}$, $n \in N$ and $\{f_{0k_n}(n, x)\}$, $n \in \bar{\bar{N}}$ are QM-equivalent, according to Theorem 16. 1 and Theorem 9. 3. Thus we have $f_{0k_n}(n, x) \to f(x)$ as $n \to \infty$. In the same way we prove that $\int\limits_{|x| \leq \eta} x df_{0k_n}(n, x) \to \alpha_1(\eta)$ and $\int\limits_{|x| \leq \eta} x^2 df_{0k_n}(n, x) \to \alpha_2(\eta)$ as $n \to \infty$. Thus we find that $\{f_{0k_n}(n, x)\}$ is QM-convergent. Then it is Cauchy-convergent in the W-norm.

18. The limit problem for convolutions of general C-sequences.

Consider general C-sequences $\{F_k(n, x)\}$. We shall prove that the limit problem for convolutions of such sequences can be reduced to that problem which has been solved in Section 17. Then we assume

$$(18.1) \qquad F_{0k}(n, x) \to F^{(1)}(x), \; F_{kk_n}(n, x) \to F^{(2)}(x) \qquad (n \to \infty, k \to \infty),$$

where $F^{(1)}(x)$ and $F^{(2)}(x)$ are d. f.'s.

To begin with we state

Theorem 18. 1. *$\{f_{0k_n}(n, x)\}$ necessarily tends weakly to a normal q. d. f.*

Let this normal q. d. f. be $f(x)$ and let η_0 be such a positive number that $\pm \eta_0$ are continuity points of $f(x)$ and of all $F_k(x)$. Putting

$$m_k(n) = \int\limits_{|x| \leq \eta_0} x dF_k(n, x),$$

we introduce the normalized sequence $\{V_k(n, x)\}$ by

$$V_k(n, x) = F_k[n, x + m_k(n)].$$

We define $V_i(n, x) = \varepsilon(x)$ for $i > k_n$ and state

Theorem 18. 2. 1° *$V_k(n, x)$ is centered,*

2° *$v_{0k_n}(n, x)$ is Cauchy convergent in the W-norm,*

3° *$\sum\limits_{i=1}^{k} m_i(n)$ and $\sum\limits_{i=k+1}^{k_n} m_i(n)$ tend to finite limits as $n \to \infty$, $k \to \infty$.*

Obviously the Theorems 18. 1 and 18. 2 reduce the general limit problems for C-sequences to that problem, which has been solved in Section 17.

For the proof of these theorems we shall use

Lemma 18. 1. *Given positive numbers $\varepsilon_0 \leq \varepsilon_1 \leq \varepsilon_2$, a sequence $\{c_i\}$ of numbers such that $|c_i| \leq \varepsilon_0$ for $i \leq j$, and a sequence $\{G_i(x)\}$ of d. f.'s. Then the following inequality holds for $\varepsilon_1 \leq \xi \leq \varepsilon_2$, $\varepsilon_1 \leq \eta \leq \varepsilon_2$*

$$\sum_{i=1}^{j} \Big| \int\limits_{|x| \leq \xi} x dG_i(x + c_i) - \int\limits_{|x| \leq \eta} x dG_i(x) + c_i \Big|$$
$$\leq \varepsilon_0 \int\limits_{|x| \geq \varepsilon_1 - \varepsilon_0} dg_{0j}(x) + (\varepsilon_2 + \varepsilon_0) \int\limits_{\varepsilon_1 - \varepsilon_0 \leq |x| \leq \varepsilon_2 + \varepsilon_0} dg_{0j}(x).$$

Proof. For the members of the sum, we get

$$\left| \int_{|x| \leq \xi} x dG_i(x + c_i) - \int_{|x| \leq \eta} x dG_i(x) + c_i \right|$$
$$= \left| \int_{|x - c_i| \leq \xi} (x - c_i)\, dG_i(x) - \int_{|x| \leq \eta} x dG_i(x) + c_i \right|$$
$$\leq |c_i| \int_{|x| \leq \varepsilon_1 - |c_i|} dG_i(x) + (\varepsilon_2 + |c_i|) \int_{\varepsilon_1 - |c_i| \leq |x| \leq \varepsilon_2 + |c_i|} dG_i(x),$$

and from this inequality we immediately get the inequality of the lemma.

We are now going to prove the Theorems 18. 1 and 18. 2. Before having proved Theorem 18. 1 we shall only assume that $\pm \eta_0$ are continuity points of all $F_k(x)$.

Using the C-condition and applying Corollary 1 of Lemma 5. 1, we get

$$m_k(n) \to \int_{|x| \leq \eta_0} x dF_k(x) = m_k \qquad (n \to \infty), \tag{18. 2}$$

and

$$|m_k(n)| \leq \varepsilon + \eta_0 \int_{|x| \geq \varepsilon} dF_k(n, x) \to \varepsilon \qquad \begin{pmatrix} n \to \infty \\ k \to \infty \end{pmatrix}$$

for any $\varepsilon > 0$, i. e.

$$m_k(n) \to 0 \qquad \begin{pmatrix} n \to \infty \\ k \to \infty \end{pmatrix}. \tag{18. 3}$$

Then we obviously have

$$\begin{cases} V_k(n, x) \to F_k(x + m_k) = V_k(x), & (n \to \infty), \\ V_k(n, x) \to \varepsilon(x) & \begin{pmatrix} n \to \infty \\ k \to \infty \end{pmatrix}. \end{cases} \tag{18. 4}$$

Thus $\{V_k(n, x)\}$ is a C-sequence.

Since (18. 1) holds, $F_{0k_n}(n, x)$ tends weakly to the d. f. $F(x) = F^{(1)}(x) * F^{(2)}(x)$ as $n \to \infty$. Then applying the Corollary of Theorem 14. 1, we get

$$\limsup_{n \to \infty} \left| \int_{|x| \geq \xi} df_{0k_n}(n, x) \right| \begin{cases} < \infty \text{ for } \xi \neq \infty, \\ \to 0 \quad \xi \to \infty. \end{cases} \tag{18. 5}$$

Now we use the inequality of Lemma 18. 1 for $G_i(x) = F_i(n, x)$, $c_i = m_i(n)$, $\eta = \eta_0$. According to (18. 3), we may choose an integer k_0 so large that $|m_k(n)| < \varepsilon_1/2$ for $k > k_0$, $n > k_0$. Hence we obtain from Lemma 18. 1, regarding (18. 5),

$$\limsup_{n \to \infty} \sum_{i=k_0+1}^{k_n} \left| \int_{|x| \leq \xi} x dV_i(n, x) \right| < \infty \text{ for } \xi < \infty.$$

Thus $\{V_i(n, x)\}$ is centered. (By the made assumption, we have $V_i(n, x) = \varepsilon(x)$ for $i > k_n$.)

Now we put

$$A_n = -\sum_{i=1}^{k_n} m_i(n) \tag{18. 6}$$

and observe that then $V_{0k_n}(n, x + A_n) = F_{0k_n}(n, x)$. Applying the Corollary of Theorem 14. 1 and using the assumption that $F_{0k_n}(n, x)$ tends to a d. f. as $n \to \infty$ we conclude that $\{V_k(n, x)\}$ is centered in the W-norm. By Theorem 12. 1 we further find that $v_{0k}(x)$ is Cauchyconvergent in the W-norm. Then we find, by Theorem 12. 2, that $V_{0k}(x)$ tends to a d. f. $V^{(1)}(x)$ as $k \to \infty$, and observing that $V_{ck}(x)$ is the weak limit of $V_{0k}(n, x)$ as $n \to \infty$, we thus get

$$V_{0k}(n, x) \to V^{(1)}(x) \qquad (n \to \infty, k \to \infty). \tag{18. 7}$$

By the assumption made, $F_{0k}(n, x)$ tends to a d. f. $F^{(1)}(x)$ as $n \to \infty$, $k \to \infty$. Now

$$V_{0k}(n, x) = F_{0k}(n, x + \sum_{i=1}^{k} m_i(n))$$

and then surely

$$\sum_{i=1}^{k} m_i(n) \to \mu \qquad (n \to \infty, k \to \infty) \tag{18. 8}$$

with a finite number μ, i. e. we have

$$V^{(1)}(x) = F^{(1)}(x + \mu). \tag{18. 9}$$

We shall now prove that

$$\limsup_{n \to \infty} | A_n | < \infty. \tag{18. 10}$$

In fact, if this inequality were not true, the sequence 1, 2, 3, . . . would contain at least one sub-sequence N_0 such that $| A_n | \to \infty$, $n \to \infty$, $n \in N_0$. Observing that, according to the Corollary of Theorem 14. 1 and Lemma 8. 1, $\{V_k(n, x)\}$ satisfies the conditions (17. 1) — (17. 3), and proceding as in section 17, from the sequence N_0 we could select a sub-sequence N such that $v_{0k_n}(n, s)$ were QM-convergent. Then, according to Theorem 12. 2, $V_{0k_n}(n, x)$ would tend to a d. f. as $n \to \infty$, $n \in N$. This, however, is impossible, since $F_{0k_n}(n, x) = V_{0k_n}(n, x + A_n)$ tends to a d. f. as $n \to \infty$. Thus (18. 10) is true.

Now we put

$$W_k(n, x) = V_k\left(n, x + \frac{A_n}{k_n}\right) = F_k\left(n, x + m_k(n) + \frac{A_n}{k_n}\right). \tag{18. 11}$$

Using (18. 10) and the fact that $\{V_k(n, x)\}$ is a C-sequence, we easily find that $\{W_k(n, x)\}$ is a C-sequence. Further, using the inequality of Lemma 18. 1 for $G_i(x) = F_i(n, x)$, $c_i = m_k(n) + \dfrac{A_n}{k_n}$ we find, in the same way as for the sequence $\{V_k(n, x)\}$, that $\{W_k(n, x)\}$ is centered and, in the same way as for $\{V_k(n, x)\}$, we also find that $\{W_k(n, x)\}$ is centered in the W-norm.

We shall now show that $W_{0k}(n, x)$ and $W_{kk_n}(n, x)$ tend to definite d. f.'s as $n \to \infty$, $k \to \infty$. Observing that

$$W_{0k}(n, x) = V_{0k}\left(n, x + \frac{kA_n}{k_n}\right),$$

$$W_{kk_n}(n, x) = V_{kk_n}\left(n, x + \frac{k_n - k}{k_n} A_n\right) = F_{kk_n}\left(n, x - \frac{k}{k_n} A_n - \sum_{i=1}^{k} m_i(n)\right),$$

we get by (18. 7) and (18. 10),

$$W_{0k}(n, x) \to V^{(1)}(x) \qquad (n \to \infty, k \to \infty), \tag{18. 13}$$

and by (18. 1), (18. 8) and (18. 10)

$$W_{kk_n}(n, x) \to F^{(2)}(x - \mu) \qquad (n \to \infty, k \to \infty). \tag{18. 14}$$

Having proved that $\{W_k(n, x)\}$ is a centered C-sequence which is also centered in the W-norm and satisfies (18. 13) and (18. 14), we find by Theorem 17. 1 that $\{w_{0k_n}(n, x)\}$ is QM-convergent. Particularly we have

$$w_{0k_n}(n, x) \to w(x), \quad \int_{|x| \leq \eta} x dw_{0k_n}(n, x) \to \alpha^{(1)}(\eta) \qquad (n \to \infty, k \to \infty),$$

where $w(x)$ is a normal q. d. f. and $\alpha^{(1)}(\eta)$ is finite for finite η. According to Theorem 12. 1, the limits

$$w_{0k}(n, x) \to w^{(1)}(x), \quad \int_{|x| \leq \eta} x dw_{0k}(n, x) \to \alpha_1^{(1)}(\eta) \qquad (n \to \infty, k \to \infty),$$

exist, and hence also the limits

$$w_{kk_n}(n, x) \to w^{(2)}(x) = w(x) - w^{(1)}(x) \qquad (n \to \infty, k \to \infty)$$

and

$$(18.\ 15) \qquad \int_{|x| \leq \eta} x dw_{kk_n}(n, x) \to \alpha_1^{(2)}(\eta) = \alpha_1(\eta) - \alpha_1^{(1)}(\eta) \qquad (n \to \infty, k \to \infty)$$

exist.

Regarding the identity

$$w_{kk_n}(n, x) = \sum_{i=k+1}^{k_n} \left[F_i\left(n, x + m_i(n) + \frac{A_n}{k_n}\right) - \varepsilon(x) \right]$$

and the relations $m_i(n) \to 0$ as $\binom{n \to \infty}{i \to \infty}$, $\frac{A_n}{k_n} \to 0$ as $n \to \infty$, we then get

$$f_{kk_n}(n, x) \to w^{(2)}(x) \qquad (n \to \infty, k \to \infty).$$

By (18. 5), it is further easily seen that the limit

$$f_{0k}(n, x) \to f^{(1)}(x) \qquad (n \to \infty, k \to \infty)$$

exists with a normal q. d. f. $f^{(1)}(x)$. Hence we have

$$f_{0k_n}(n, x) \to f(x) = f^{(1)}(x) + w^{(2)}(x) \qquad (n \to \infty),$$

what is the statement of Theorem 18. 1.

From now on we assume that $\pm \eta_0$ are continuity points of $f(x)$. Applying again the inequality of Lemma 18. 1 for $G_i(x) = F_i(n, x)$, $c_i = m_i(n) + \frac{A_n}{k_n}$, $\xi = \eta = \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \eta_0$, and observing that $|f_{kk_n}(n, x)| \leq |f_{0k_n}(n, x)|$, we obtain for $\eta_0 > \varepsilon_0$

$$(18.\ 16) \qquad \sum_{i=k+1}^{k_n} \left| \int_{|x| \geq \eta_0} x dW_i(n, x) + \frac{A_n}{k_n} \right|$$

$$\leq \varepsilon_0 \int_{|x| \geq \eta_0 - \varepsilon_0} df_{0k_n}(n, x) + (\eta_0 + \varepsilon_0) \int_{\eta_0 - \varepsilon_0 \leq |x| \leq \eta_0 + \varepsilon_0} df_{0k_n}(n, x)$$

$$\to \varepsilon_0 [f(-\eta_0 + \varepsilon_0) + |f(\eta_0 - \varepsilon_0)|] + (\eta_0 + \varepsilon_0) [f(-\eta_0 + \varepsilon_0)$$

$$- f(-\eta_0 - \varepsilon_0) + f(\eta_0 + \varepsilon_0) - f(\eta_0 - \varepsilon_0)] \qquad (n \to \infty).$$

Here ε_0 may be choosen arbitrarily small, and then the right side of the inequality is arbitrarily small, since $\pm \eta_0$ are continuity points of $f(x)$. From (18. 16) we get

$$\int_{|x| \leq \eta_0} x dw_{kk_n}(n, x) + \frac{k_n - k}{k_n} A_n \to 0 \qquad (n \to \infty, k \to \infty),$$

and then by (18. 15)

$$A_n \to -\alpha_1^{(2)}(\eta_0) \qquad (n \to \infty).$$

Hence we get by (18. 14)

$$V_{kk_n}(n, x) = W_{kk_n}\left(n, x - \frac{k_n - k}{k_n} A_n\right) \to F^{(2)}(x - \mu + \alpha_1^{(2)}(\eta_0)) \qquad (n \to \infty, k \to \infty).$$

Thus we have proved that $\{V_k(n, x)\}$ is centered and that $V_{0k}(n, x)$ and $V_{kk_n}(n, x)$ tend to definite d. f.'s as $n \to \infty$, $k \to \infty$. Applying Theorem 17. 1 we get 2° of Theorem 18. 2. Further we have proved that 1° and 3° of this theorem are satisfied.

Addition.

The use of the special norm $\sup_x \left| f(x) * \Phi\left(\frac{x}{\sigma}\right) \right|$ for $R(D)$ isn't essential. There is a certain class of functions $\Psi \in R(D)$ such that Theorem 17. 1 still holds if Φ is changed against Ψ. We have proved that this class is formed exactly by all functions $\Psi \in R(D)$ with $\Psi(\infty) \neq 0$ and with continuous second derivative in $(-\infty, \infty)$, which tends to 0 as $|x| \to \infty$. It may be observed that we then require that D (as subset of $R(D)$) is closed in the norm $\sup \left| f(x) * \Psi\left(\frac{x}{\sigma}\right) \right|$.

Eingegangen 31. Juli 1956.

An Interpolation Series for Continuous Functions of a p-adic Variable.

Meinem Lehrer C. L. Siegel zu seinem 60. Geburtstag gewidmet.

By *K. Mahler* in Manchester.

The theory of analytic functions of a p-adic variable (i. e. of functions defined by power series) is much simpler than that of complex analytic funktions and offers few surprises. On the other hand, the behaviour of *continuous functions of a p-adic variable* is quite distinct from that of real continuous functions, and many basic theorems of real analysis have no p-adic analogues. Thus there is no simple analogue to the mean value theorem of differential calculus, even for polynomials like $\binom{x}{p}$; there exist infinitely many linearly independent non-constant functions the derivative of which vanishes identically; and if a series $f(x) = \sum f_n(x)$ converges and the derived series $g(x) = \sum f'_n(x)$ converges uniformly, $g(x)$ still need not be the derivative of $f(x)$; etc.

The main paper on the subject is that by *J. Dieudonné*, Sur les fonctions continues p-adiques, Bull. Sci. Math. (2) 68 (1944), 79—95. I mention, in particular, his p-adic analogue to Weierstrass's theorem on the approximation of continuous functions by polynomials, and his existence theorem for differential equations. Most of his paper deals with the more general class of p-adic valued continuous functions on compact totally discontinuous spaces and falls outside the subject of this note.

I had already become interested in the subject before I learned of his paper. Earlier this year, J. F. Koksma (who then also did not know of Dieudonné's work) suggested to me that there should be a p-adic analogue to Weierstrass's approximation theorem. The solution which I obtained finally proved to be very different from that by Dieudonné.

There is no great loss of generality in restricting oneself to functions $f(x)$ on the set I of all p-adic integers. The subset J of the non-negative integers is dense on I. Hence a continuous function $f(x)$ on I is already determined by its values on J, hence also by the numbers

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} f(n-k) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

I prove that $\{a_n\}$ is a p-adic null sequence, and that

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \binom{x}{n}$$

for all $x \in I$. Thus $f(x)$ can be approximated by means of polynomials.

I further study conditions for the a_n under which $f(x)$ is differentiable at a point, or has a continuous derivative everywhere on I. Thus, by way of example, $\sum_{r=0}^{\infty} p^r \binom{x}{p^r}$ is

continuous, but nowhere differentiable, on I (an entirely different example was given by Dieudonné); and $\sum_{r=0}^{\infty} p^r \binom{x}{p^r - 1}$ has a continuous derivative for $x \neq -1$, but is not differentiable at $x = -1$. Two problems on differentiation are stated which I have not succeeded in solving; they seem well worth of further study. I conclude the paper with a result on a special infinite system of linear equations.

1. Throughout this paper, p is a fixed prime; R is the field of all p-adic numbers; $|x|_p$ is the p-adic value normed such that $|p|_p = 1/p$; $I = \{x;\ |x|_p \leqq 1\}$ is the ring of all p-adic integers; and J is the subset of all non-negative rational integers. *Thus J lies everywhere dense in I.*

Limits both of real and of p-adic numbers will occur, but it will in each case be clear from the context which kind of limit is meant.

All functions $f(x)$ will be defined for all $x \in I$ and have values in R. We shall mainly be concerned with functions that are continuous at all points of I, or that have a continuous derivative on I.

2. With each function $f(x)$ we associate the infinite sequence of coefficients

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} f(n-k) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

and the *formal* interpolation series

$$f^*(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \binom{x}{n}.$$

These coefficients a_n are the successive differences at $x = 0$ of the sequence $\{f(0), f(1), f(2), \ldots\}$, and they may also be defined by the recursive formulae

$$f^*(n) = f(n) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

in which $f^*(n)$ reduces to a finite sum.

3. Lemma 1. *The series $f^*(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \binom{x}{n}$ converges for all $x \in I$ if and only if*

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0.$$

Proof. (a) The condition is necessary because e. g. the series

$$f^*(-1) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$$

does not converge unless its terms $\mp a_n$ tend to zero.

(b) Assume that $\lim a_n = 0$. For every $x \in I$ select a $y \in J$ such that

$$\left| \frac{x-y}{n!} \right|_p \leqq 1.$$

Then $\binom{y}{n-k}$ is a positive integer, hence

$$\left| \binom{y}{n-k} \right|_p \leqq 1 \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, n).$$

Further $\binom{x-y}{0} = 1$, and

$$\binom{x-y}{k} = \frac{(x-y)(x-y-1)\cdots(x-y-k+1)}{k!} = \frac{x-y}{n!} \lambda_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

where λ_k denotes a p-adic integer; therefore also

$$\left|\binom{x-y}{k}\right|_p \leqq 1 \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, n).$$

The identity

$$\binom{x}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{x-y}{k}\binom{y}{n-k}$$

implies then that

$$\left|\binom{x}{n}\right|_p \leqq 1 \text{ if } x \in I,\ n \in J,$$

and so

$$\left|a_n \binom{x}{n}\right|_p \leqq |a_n|_p \to 0 \text{ as } n \to \infty,$$

giving the convergence of $f^*(x)$.

This proof shows, moreover, that $f^*(x)$ converges *uniformly* for $x \in I$, hence that its sum is a *continuous* function because the terms are polynomials and therefore continuous.

Lemma 2. *Let* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. *Then* $f^*(x) = f(x)$ *if* $x \in I$.

Proof. Both $f(x)$ and $f^*(x)$ are continuous on I, and they are equal when $x \in J$. Since J is dense in I, every $x \in I$ is the limit of a sequence $\{y_n\}$ of elements of J. Then

$$f^*(y_n) = f(y_n) \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

and so, by continuity,

$$f^*(x) = \lim_{n\to\infty} f^*(y_n) = \lim_{n\to\infty} f(y_n) = f(x).$$

4. Theorem 1. *Let* $f(x)$ *be continuous on* I. *Then*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0, \textit{ and therefore } f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \binom{x}{n} \textit{ if } x \in I.$$

Proof. As a continuous function on a compact set, $f(x)$ is both *bounded* and *uniformly continuous* on I. As we may, if necessary, multiply $f(x)$ by a power of p, there is no restriction in assuming that

$$|f(x)|_p \leqq 1 \text{ if } x \in I.$$

Further, if s is any positive integer, there is a second positive integer $t = t(s)$ such that

$$|f(x) - f(y)|_p \leqq p^{-s} \text{ if } x, y \in I,\ |x - y|_p \leqq p^{-t}.$$

In the remainder of the proof x and y may be restricted to the set J. For every $x \in J$ there is a unique integer $g(x) \in J$ satisfying

$$|f(x) - g(x)|_p \leqq p^{-s},\ 0 \leqq g(x) \leqq p^s - 1.$$

This function $g(x)$ on J is periodic,

$$g(x) = g(y) \text{ if } x, y \in J,\ x \equiv y \pmod{p^t}.$$

For the congruence is equivalent to $|x - y|_p \leqq p^{-t}$, and so

$$\begin{aligned} |g(x) - g(y)|_p &= |(g(x) - f(x)) + (f(x) - f(y)) + (f(y) - g(y))|_p \\ &\leqq \max(|g(x) - f(x)|_p,\ |f(x) - f(y)|_p,\ |f(y) - g(y|_p) \leqq p^{-s}, \end{aligned}$$

whence $g(x) = g(y)$ because distinct values of this function are, by definition, incongruent $\pmod{p^s}$.

In analogy to a_n define now

$$b_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} g(n-k) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

so that b_n is a rational integer. Evidently

$$|a_n - b_n|_p \leqq p^{-s} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Next let ω be a fixed primitive p^t-th root of unity; thus

$$\sum_{n=0}^{p^t-1} \omega^{mn} = \begin{cases} p^t \text{ if } m \equiv 0 \pmod{p^t}, \\ 0 \text{ if } m \not\equiv 0 \pmod{p^t}. \end{cases}$$

Further put

$$\lambda_m = p^{-t} \sum_{n=0}^{p^t-1} \omega^{-mn} g(n) \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots, p^t - 1).$$

Then, conversely,

$$\sum_{m=0}^{p^t-1} \lambda_m \omega^{mn} = p^{-t} \sum_{m=0}^{p^t-1} \sum_{r=0}^{p^t-1} \omega^{mn-mr} g(r) = p^{-t} \sum_{r=0}^{p^t-1} g(r) \sum_{m=0}^{p^t-1} \omega^{m(n-r)} = g(n)$$

if $n = 0, 1, 2, \ldots, p^t - 1$. Here $g(n)$ is periodic in n with the period p^t, and so is the sum on the left-hand side. Hence

$$g(n) = \sum_{m=0}^{p^t-1} \lambda_m \omega^{mn} \text{ for all } n \in J,$$

whence

$$b_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \sum_{m=0}^{p^t-1} \lambda_m \omega^{m(n-k)} = \sum_{m=0}^{p^t-1} \lambda_m \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \omega^{m(n-k)}$$

and finally

$$b_n = \sum_{m=0}^{p^t-1} \lambda_m (\omega^m - 1)^n \text{ for all } n \in J.$$

Let now K be the cyclotomic field generated by ω, and let $\mathfrak{o}$ be the ring of all algebraic integers in K. Not only ω, but also the quotients

$$\frac{\omega^m - 1}{\omega - 1} = \omega^{m-1} + \omega^{m-2} + \cdots + \omega + 1 \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots, p^t - 1)$$

and the products

$$p^t \lambda_m = \sum_{n=0}^{p^t-1} \omega^{-mn} g(n) \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots, p^t - 1)$$

are elements of $\mathfrak{o}$. The expression for b_n implies therefore that

$$p^t (\omega - 1)^{-n} b_n \in \mathfrak{o} \text{ if } n \in J.$$

It is well-known that the two principal ideals (p) and $(\omega - 1)$ in $\mathfrak{o}$ satisfy the relation

$$(p) = (\omega - 1)^{p^{t-1}(p-1)}$$

which expresses (p) as the power of a prime ideal. Put

$$N = [n p^{-(t-1)} (p-1)^{-1}]$$

where, as usual, [a] is the integral part of a. Then p^N is a divisor of $(\omega - 1)^n$. The rational numbers $p^{-N} b_n$ are therefore algebraic integers and so are rational integers. Hence

$$|b_n|_p \leqq p^{t-N},$$

whence

$$|b_n|_p \leqq p^{-s} \text{ if } n \geqq p^{t-1}(p-1)(s+t), = n_0 \text{ say},$$

because $N \geqq s + t$ if $n \geqq n_0$.

On combining this with the earlier inequality for $a_n - b_n$ we obtain the result that

$$|a_n|_p = |(a_n - b_n) + b_n|_p \leqq \max(|a_n - b_n|_p, |b_n|_p) \leqq p^{-s} \text{ if } n \geqq n_0.$$

Here s may be arbitrarily large, and n_0 depends only on s because t is a function of s. Therefore

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0,$$

giving the assertion.

5. Lemma 3. *Let $f(x)$ be continuous on I, and let $x, y \in I$. Then all series*

$$a_n(y) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{n+k}\binom{y}{k} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

converge, and further

$$\lim_{n\to\infty} a_n(y) = 0, \quad f(x+y) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(y)\binom{x}{n}.$$

Proof. The convergence of $a_n(y)$ follows from $\lim_{k\to\infty} a_{n+k} = 0$, since $\left|\binom{y}{k}\right|_p \leqq 1$. Next $\{a_n(y)\}$ forms a null sequence because

$$|a_n(y)|_p \leqq \max_{k=0,1,2,\ldots} |a_{n+k}|_p \to 0 \text{ as } n \to \infty.$$

Finally

$$f(x+y) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \binom{x+y}{m} = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \sum_{n=0}^{m} \binom{x}{n}\binom{y}{m-n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{x}{n} \sum_{m=0}^{\infty} a_m \binom{y}{m-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{x}{n} \sum_{k=0}^{\infty} a_{n+k}\binom{y}{k} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(y)\binom{x}{n}.$$

Here the reordering of the terms is allowed since we are dealing with p-adic series, and since $\{a_n\}$ is a null sequence.

6. We next establish necessary and sufficient conditions, in terms of the coefficients a_n, for the existence of a derivative of $f(x)$. The proof will be based on the following Tauberian theorem.

Theorem 2. *Let $\{a_n\}$ be a p-adic null sequence. If the p-adic limit*

$$\lambda = \lim_{|x|_p \to 0} \sum_{n=1}^{x} \frac{a_n}{n}\binom{x-1}{n-1}$$

extended over all elements $x \neq 0$ of J exists, then

$$\text{(i)} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = 0; \quad \text{(ii)} \quad \lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}\binom{-1}{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{a_n}{n}.$$

The proof of the assertion (i) is rather long and involved and is indirect. It will be carried out in several steps.

7. As a first step assume that λ exists, but that

$$\limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{n}\right|_p = \infty.$$

There are then infinitely many integers $n_1, n_2, n_3, \ldots$ such that

$$0 < n_1 < n_2 < n_3 < \cdots,$$

$$a_{n_r} \neq 0 \text{ for } r = 1, 2, 3, \ldots,$$

$$\lim_{r\to\infty} \left| \frac{a_{n_r}}{n_r} \right|_p = \infty.$$

Since, by hypothesis,

$$\lim_{n\to\infty} | a_n |_p = \lim_{r\to\infty} | a_{n_r} |_p = 0,$$

necessarily

$$\lim_{r\to\infty} | n_r |_p = 0.$$

The sequence $\{n_r\}$ may be replaced by any infinite subsequence. Hence there is no loss of generality in further assuming that

$$\left| \frac{a_n}{n} \right|_p < \left| \frac{a_{n_r}}{n_r} \right|_p \text{ for } n = 1, 2, \ldots, n_r - 1 \qquad (r = 1, 2, 3, \ldots).$$

In the limit defining λ we may allow x to tend to zero over the sequence $\{n_r\}$; thus

$$\lambda = \lim_{r\to\infty} \sum_{n=1}^{n_r} \frac{a_n}{n} \binom{n_r - 1}{n - 1} = \lim_{r\to\infty} \left\{ \frac{a_{n_r}}{n_r} + \sum_{n=1}^{n_r - 1} \frac{a_n}{n} \binom{n_r - 1}{n - 1} \right\}.$$

Here, by the construction of n_r,

$$\left| \frac{a_n}{n} \binom{n_r - 1}{n - 1} \right|_p < \left| \frac{a_{n_r}}{n_r} \right|_p \qquad (n = 1, 2, \ldots, n_r - 1)$$

and therefore

$$| \lambda |_p = \lim_{r\to\infty} \left| \frac{a_{n_r}}{n_r} \right|_p = \infty,$$

contrary to hypothesis.

8. As a second step, assume that λ exists and that $\left\{ \frac{a_n}{n} \right\}$ is a bounded sequence, but not a null sequence. As we may multiply the coefficients a_n by a fixed power of p and may further change finitely many of these coefficients arbitrarily, without affecting the assertion, there is no loss of generality in assuming that

$$| a_n |_p \leqq 1, \quad \left| \frac{a_n}{n} \right|_p \leqq 1 \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

$$\limsup_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{n} \right|_p = 1.$$

The existence of the limit λ now implies that there is a positive integer s such that

$$\left| \sum_{n=1}^{x} \frac{a_n}{n} \binom{x - 1}{n - 1} - \lambda \right|_p \leqq \frac{1}{p} \text{ if } x \in J,\ 0 < | x |_p \leqq p^{-s},$$

and this inequality remains valid if s is increased. We satisfy the condition for x by putting

$$x = p^s(\xi + 1) \text{ where } \xi \in J.$$

Next, since $\{a_n\}$ is a null sequence, evidently

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ p^s \nmid n}} \frac{a_n}{n} = 0.$$

Therefore, on increasing s, if necessary, there is also no loss of generality in further assuming that

$$\left|\frac{a_n}{n}\right|_p \leqq \frac{1}{p} \text{ if } p^s \nmid n,\ n \geqq p^s.$$

Hence, by $\left|\binom{x-1}{n-1}\right|_p \leqq 1$, the inequality for λ implies that

$$\left|\sum_{n=1}^{p^s-1} \frac{a_n}{n}\binom{x-1}{n-1} + \sum_{\substack{n=p^s \\ p^s|n}}^{x} \frac{a_n}{n}\binom{x-1}{n-1} - \lambda\right|_p \leqq \frac{1}{p} \text{ if } x = p^s(\xi+1),\ \xi \in J.$$

9. We introduce now a simple congruence for binomial coefficients $\binom{M}{N}$ where M is a positive and N a non-negative integer. Let

$$M = g_0 + g_1 p + \cdots + g_r p^r,\ N = h_0 + h_1 p + \cdots + h_r p^r$$

be the representations of M and N, respectively, to the basis p; here the digits g_j and h_j assume only the values $0, 1, \ldots, p-1$. It is easily proved that

$$\binom{M}{N} \equiv \binom{g_0}{h_0}\binom{g_1}{h_1}\cdots\binom{g_{s-1}}{h_{s-1}} \pmod{p}.$$

We apply this formula to $\binom{x-1}{n-1}$ where $x = p^s(\xi+1)$ and $\xi \in J$, and either $n \leqq p^s - 1$, or $n \geqq p^s$ and $p^s \mid n$. In the second case n may be written as

$$n = p^s(\nu+1), \text{ where } \nu \in J.$$

Then $x-1$ has the representation

$$x-1 = \{(p-1) + (p-1)p + \cdots + (p-1)p^{s-1}\} + g_s p^s + g_{s+1}p^{s+1} + \cdots + g_r p^r;$$

and $n-1$ has in the first case the representation

$$n-1 = \{h_0 + h_1 p + \cdots + h_{s-1}p^{s-1}\} + 0\cdot p^s + 0\cdot p^{s+1} + \cdots + 0\cdot p^r,$$

and in the second case the representation

$$n-1 = \{(p-1) + (p-1)p + \cdots + (p-1)p^{s-1}\} + h_s p^s + h_{s+1}p^{s+1} + \cdots + h_r p.$$

Here $g_s, g_{s+1}, \ldots, g_r$; $h_1, h_2, \ldots, h_{s-1}$; $h_s, h_{s+1}, \ldots, h_r$ are again certain digits $0, 1, \ldots, p-1$.

From the congruence above it follows at once that for $n \leqq p^s - 1$

$$\binom{x-1}{n-1} \equiv \binom{p-1}{h_0}\binom{p-1}{h_1}\cdots\binom{p-1}{h_{s-1}} \equiv (-1)^{h_0+h_1+\cdots+h_{s-1}} \pmod{p},$$

and for $n = p^s(\nu+1)$

$$\binom{x-1}{n-1} \equiv \binom{g_s}{h_s}\binom{g_{s+1}}{h_{s+1}}\cdots\binom{g_r}{h_r} \equiv \binom{\xi}{\nu} \pmod{p};$$

for in the second case ξ and ν allow the representations

$$\xi = g_s p^s + g_{s+1}p^{s+1} + \cdots + g_r p^r,\ \nu = h_s p^s + h_{s+1}p^{s+1} + \cdots + h_r p^r.$$

Since $\left|\frac{a_n}{n}\right|_p \leqq 1$, we thus obtain the formulae

$$\sum_{n=1}^{p^s-1} \frac{a_n}{n}\binom{x-1}{n-1} = \sum_{n=1}^{p^s-1} \chi(n)\frac{a_n}{n} + \varrho(x)$$

and

$$\sum_{\substack{n=p^s \\ p^s|n}}^{x} \frac{a_n}{n}\binom{x-1}{n-1} = \sum_{\nu=0}^{\xi} \alpha_\nu \binom{\xi}{\nu} + \sigma(x).$$

Here the sign

$$\chi(n) = (-1)^{h_0+h_1+\cdots+h_{s-1}},$$

depends only on n and not on x. Further we have put

$$\frac{a_n}{n} = \alpha_\nu \text{ if } n = p^s(\nu+1),$$

and we denote by $\varrho(x)$ and $\sigma(x)$ two p-adic functions of x such that

$$|\varrho(x)|_p \leqq \frac{1}{p}, \quad |\sigma(x)|_p \leqq \frac{1}{p}.$$

10. The estimate for λ takes now the form

$$\left| \sum_{n=1}^{p^s-1} \chi(n)\frac{a_n}{n} + \varrho(x) + \sum_{\nu=0}^{\xi} \alpha_\nu \binom{\xi}{\nu} + \sigma(x) - \lambda \right|_p \leqq \frac{1}{p} \text{ if } \xi \in J$$

or

$$\sum_{\nu=0}^{\xi} \alpha_\nu \binom{\xi}{\nu} = \mu + \tau(\xi).$$

Here μ denotes the new constant

$$\mu = \lambda - \sum_{n=1}^{p^s-1} \chi(n)\frac{a_n}{n},$$

and $\tau(\xi)$ is a p-adic function of ξ such that

$$|\tau(\xi)|_p \leqq \frac{1}{p}.$$

Hence, on putting successively $\xi = 0, 1, 2, \ldots$, we obtain the infinite system of equations

$$\alpha_0 = \mu + \tau(0), \quad \alpha_0 + \alpha_1 = \mu + \tau(1), \quad \alpha_0 + 2\alpha_1 + \alpha_2 = \mu + \tau(2),$$
$$\alpha_0 + 3\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 = \mu + \tau(3), \ldots$$

and deduce at once that

$$|\alpha_\nu|_p \leqq \frac{1}{p} \text{ if } \nu = 1, 2, 3, \ldots.$$

On the other hand, it was assumed that

$$\left|\frac{a_n}{n}\right|_p < 1 \text{ if } p^s \nmid n, \; n \geqq p^s,$$

$$\limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{n}\right|_p = 1.$$

Hence there are infinitely many suffixes n for which

$$p^s \mid n \text{ and } \left|\frac{a_n}{n}\right|_p = 1,$$

and so there exist also infinitely many suffixes ν satisfying

$$|\alpha_\nu|_p = 1,$$

contrary to what has just been proved.

Thus the hypothesis at the beginning of § 8 likewise leads to a contradiction. This proves the assertion (i) of Theorem 2.

11. Instead of the assertion (ii) of Theorem 2 we prove now a slightly stronger result.

Lemma 4. *Let* $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$ *be a p-adic null sequence. Then the limit*

$$\lambda = \lim_{x \to 0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} \binom{x-1}{n-1}$$

extended over all $x \in I$ *exists and is equal to*

$$\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{a_n}{n}.$$

Proof. Let s be any given positive integer. There exists a positive integer N such that $\left|\frac{a_n}{n}\right|_p \leqq p^{-s}$ if $n > N$, hence

$$\left|\sum_{n=N+1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{a_n}{n}\right|_p \leqq p^{-s} \text{ and } \left|\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{a_n}{n} \binom{x-1}{n-1}\right|_p \leqq p^{-s};$$

here both series converge as their terms tend to zero.

The finite sum

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{a_n}{n} \binom{x-1}{n-1}$$

is a polynomial in x, hence is a continuous function, and so

$$\lim_{x \to 0} \sum_{n=1}^{N} \frac{a_n}{n} \binom{x-1}{n-1} = \sum_{n=1}^{N} \frac{a_n}{n} \binom{-1}{n-1} = \sum_{n=1}^{N} (-1)^{n-1} \frac{a_n}{n}.$$

Therefore a positive integer $t = t(s)$ exists such that

$$\left|\sum_{n=1}^{N} \frac{a_n}{n} \binom{x-1}{n-1} - \sum_{n=1}^{N} (-1)^{n-1} \frac{a_n}{n}\right|_p \leqq p^{-s} \text{ if } |x|_p \leqq p^{-t}.$$

On combining these estimates, we find that

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} \binom{x-1}{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{a_n}{n}\right|_p \leqq p^{-s} \text{ if } |x|_p \leqq p^{-t}.$$

Since s may be arbitrarily large and t depends only on s, the assertion follows at once.

12. Theorem 3. *Let* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \binom{x}{n}$ *be continuous on* I, *and let* $a_n(y)$ *be defined as in Lemma 3. The function* $f(x)$ *is differentiable at a point* $y \in I$ *if, and only if,*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n(y)}{n} = 0,$$

and then

$$f'(y) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{a_n(y)}{n}.$$

Proof. By Lemma 3, $\{a_n(y)\}$ is a null sequence, and

$$f(x+y) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(y) \binom{x}{n}.$$

Therefore

$$\frac{f(x+y) - f(y)}{x} = \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} a_n(y) \binom{x}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n(y)}{n} \binom{x-1}{n-1}.$$

The assertion follows therefore immediately from the definition of the derivative and from Theorem 2 and Lemma 4.

13. Theorem 4. *Let* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \binom{x}{n}$ *be continuous on* I. *If the derivative* $f'(x)$ *exists and is continuous for all* $x \in I$, *then*

(i) *all series* $\quad a'_n = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{a_{k+n}}{k} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$ *converge;*

(ii) *the sequence* $\{a'_n\}$ *is a null sequence; and*

(iii) $$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a'_n \binom{x}{n} \text{ if } x \in I.$$

Proof. Assume, first, that $f'(y)$ exists for all $y \in J$. By Theorem 3, the sequence

$$\left\{\frac{a_k(y)}{k}\right\} = \left\{\sum_{n=0}^{y} \frac{a_{k+n}}{k} \binom{y}{n}\right\}$$

is a null sequence. As this holds for each $y = 0, 1, 2, \ldots$, the simpler sequences

$$\left\{\frac{a_{1+n}}{1}, \frac{a_{2+n}}{2}, \frac{a_{3+n}}{3}, \ldots\right\}$$

are likewise null sequences when $n = 0, 1, 2, \ldots$. The series a'_n therefore all converge and $f'(y)$ is given by

$$f'(y) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{a_k(y)}{k} = \sum_{n=0}^{y} a'_n \binom{y}{n} \quad \text{if } y \in J.$$

Hence the formal interpolation series

$$f^{**}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a'_n \binom{x}{n},$$

which for $x \in J$ reduces to a finite sum, satisfies the equations

$$f^{**}(x) = f'(x) \text{ if } x \in J.$$

Secondly, let $f'(x)$ exist and be continuous for all $x \in I$. By Theorem 1, $f'(x)$ can then be developed into a convergent interpolation series, and this must be exactly the series $f^{**}(x)$ because $f^{**}(x)$ coincides with $f'(x)$ for $x \in J$. Therefore, again by Theorem 1 the assertions (ii) and (iii) follow at once.

14. By way of example, let us consider two special functions. First, let

$$f(x) = \sum_{r=0}^{\infty} p^r \binom{x}{p^r} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \binom{x}{n} \text{ where } a_n = \begin{cases} p^r & \text{if } n = p^r, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Hence

$$a_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+n} \binom{x}{k} = \sum_{p^r \geq n} p^r \binom{x}{p^r - n},$$

and so, in particular,

$$\frac{a_{p^s}(x)}{p^s} = \sum_{r=s}^{\infty} p^{r-s} \binom{x}{p^r - p^s} = 1 + p\binom{x}{p^{s+1} - p^s} + p^2 \binom{x}{p^{s+2} - p^s} + \cdots = 1 + \alpha_s(x),$$

where

$$|\alpha_s(x)|_p \leq \frac{1}{p} \qquad (s = 0, 1, 2, \ldots).$$

Therefore $\left\{\frac{a_n(x)}{n}\right\}$ is not a null sequence, and so, by Theorem 3, $f'(x)$ does not exist. Thus while $f(x)$ evidently is continuous, it is nowhere differentiable on I.

In his paper, Dieudonné constructed already a function of the same kind by an entirely different method. Let $x = g_0 + g_1 p + g_2 p^2 + \cdots$ be the p-adic development of $x \in I$; the digits $g_0, g_1, g_2, \ldots$ assume only the values $0, 1, \ldots, p-1$. Then the function $f(x)$ defined by

$$f(x) = g_0^2 + g_1^2 p + g_2^2 p^2 + \cdots$$

is continuous but non-differentiable on I provided that $p \geqq 3$.

15. As a second example take

$$f(x) = \sum_{r=0}^{\infty} p^r \binom{x}{p^r - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \binom{x}{n} \text{ where } a_n = \begin{cases} p^r & \text{if } n = p^r - 1, \\ 0 & \text{otherwise}, \end{cases}$$

so that

$$a_n(x) = \sum_{p^r \geqq n+1} p^r \binom{x}{p^r - n - 1}.$$

First let $x = -1$. Evidently

$$a_n(-1) = \sum_{p^r \geqq n+1} p^r \binom{-1}{p^r - n - 1} = (-1)^{p-n-1} \sum_{p^r \geqq n+1} p^r,$$

and therefore

$$\frac{a_{p^s}(-1)}{p^s} = -\sum_{r=s+1}^{\infty} p^r = -\frac{p}{1-p}.$$

Hence $\left\{\frac{a_n(-1)}{n}\right\}$ is not a null sequence, and $f'(-1)$ does not exist.

Assume next that $x \neq -1$. Then $\frac{a_n(x)}{n}$ may be written as

$$\frac{a_n(x)}{n} = \frac{1}{x+1} \sum_{p^r \geqq n+1} p^r \frac{p^r - n}{n} \binom{x+1}{p^r - n}.$$

Here the summation extends over all suffixes $r \geqq s+1$ where s is the integer defined by $p^s \leqq n < p^{s+1}$. Now it is obvious that

$$\left|\frac{p^r - n}{n}\right|_p = 1 \text{ if } r \geqq s+1,$$

and $\binom{x+1}{p^r - n}$ is a p-adic integer. Therefore it follows from the series that

$$\left|\frac{a_n(x)}{n}\right|_p \leqq \frac{p^{-(s+1)}}{|x+1|_p} < \frac{1}{n\,|x+1|_p},$$

and hence $\left\{\frac{a_n(x)}{n}\right\}$ is a null sequence; thus $f'(x)$ exists. It is not difficult to show that $f'(x)$ is in fact continuous if $x \neq -1$.

One can also easily verify that all series a'_n converge, but that $\{a'_n\}$ ist not a null sequence.

16. I have not succeeded in solving the following problems which deserve further study[1]).

Problem A. *Let $\{a_n\}$ be a null sequence, so that $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \binom{x}{n}$ is continuous on I. Further assume that,* (i) *all series*

$$a'_n = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{a_{k+n}}{k} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

[1]) I. W. S. Cassels has just shown, by means of a very beautiful counter-example, that both problems A and B have negative answers. The problem of finding necessary and sufficient conditions, in terms of the a_n, for the continuity of $f'(x)$ remains therefore still open. (16 November, 1956)

converge, and (ii) $\{a'_n\}$ *is a null sequence. Does this hypothesis imply that* $f'(x)$ *exists and is continuous on* I?

Problem B. *Let* $\{a_n\}$ *satisfy the same hypothesis as in Problem* A. *Is it true that then*

$$\lim_{n\to\infty} n \mid a_n \mid_p = 0\,?$$

If this limit is zero, then the conditions (i) and (ii) are satisfied, and $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \binom{x}{n}$ has a continuous derivative on I, as is proved without difficulty.

17. I conclude this paper with an application of a theorem by Dieudonné and Theorem 4 to a special infinite system of linear equations.

In his paper, Dieudonné established a general existence theorem for differential equations in the p-adic field. The simplest case of this theorem states:

If $g(x)$ *is continuous on* I, *then for every* $\varepsilon > 0$ *there exists a function* $f(x)$ *continuous and continuously differentiable on* I *which is such that* $f'(x) = g(x)$ *and* $\mid f(x) \mid_p < \varepsilon$ *for all* $x \in I$.

For write again x as a p-adic series $x = g_0 + g_1 p + g_2 p^2 + \cdots$ and put

$$x_n = g_0 + g_1 p + \cdots + g_{n-1} p^{n-1}.$$

Further let s be any fixed positive integer. The sequence of functions

$$f_n(x) = \sum_{k=s}^{n-1} (x_{k+1} - x_k)\, g(x_k) + (x - x_n)\, g(x_n) \qquad (n = s, s+1, s+2, \ldots)$$

can then be shown to tend to a limit function $f(x)$ with the required properties, provided s exceeds a certain bound which depends only on ε and the given function $g(x)$.

With the help of this theorem, we show the

Theorem 5. *Let* $\{a'_n\}$ *be any null sequence, and let* ε *be an arbitrary positive constant. There exists a second null sequence* $\{a_n\}$ *such that*

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{a_{k+n}}{k} = a'_n, \quad \mid a_n \mid_p < \varepsilon \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Proof. The function $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a'_n \binom{x}{n}$ is continuous on I. Let $f(x)$ be the function of Dieudonné satisfying $f'(x) = g(x)$ and $\mid f(x) \mid_p < \varepsilon$ for $x \in I$. This function can itself be expanded into an interpolation series $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \binom{x}{n}$ with coefficients a_n that likewise form a null sequence. Since

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} f(n-k),$$

these coefficients satisfy the inequalities $\mid a_n \mid_p < \varepsilon$. Since further $f(x)$ has the continuous derivative $g(x)$, it follows from Theorem 4 that the coefficients a_n also satisfy the linear equations of Theorem 5.

The result so proved suggests that there may be an interesting general theory of infinite systems of linear equations in infinitely many p-adic unknowns.

Eingegangen 6. Dezember 1956.

On extension of a given finitely additive field-valued measure on a finitely additive Boolean tribe to another one more ample*).

By *Otton Martin Nikodým* in Gambier (Ohio), U. S. A.

The present paper constitutes a generalization of (1) quoted at the end. The purpose is to prove that if we have, on a Boolean lattice $\mathfrak{B}$, an additive measure $\mu(a)$, whose values are taken from a general linearly ordered field $\mathfrak{F}$, and if $\mathfrak{B}$ is plunged isomorphically in a wider Boolean lattice $\mathfrak{B}'$, the measure μ can be extended from $\mathfrak{B}$ to $\mathfrak{B}'$, but with values taken from a suitably amplified field $\mathfrak{F}'$. The difference between this paper and paper (1) is that in (1) the measure $\mu(a)$ was supposed to be non negative, while in the present paper this restriction is dropped. The method of proving the possibility of extension is similar in both papers and it uses the same Banach's devise for extending linear functionals (4). However, the present paper applies a notion of the norm which differs from that, applied in (1).

Though the Banach's idea mentioned above is quite simple, its application to non archimedian fields is rather complicated. It needed creation of some new auxiliary theories and a complete refoundation of the algebra of fields. This was made in (1), so we shall continuously refer for details to this paper.

However, in order that the present paper could be read without the paper (1) in hand, we recall all important definitions of notions used. The theorem, proved in the paper, is stated at the end.

Definitions and notations.

1. We shall use the notations applied in (1), but instead of bold latin lower-case letters we shall write gothic great letters. We recall the definitions needed, to make this paper understandable even without having the paper (1) in hand.

2. The "relations" of Russell and Whitehead (5) will be termed *correspondences*. An ordered couple (a, A) will be understood as the correspondence $\{x, Y \mid x = a, Y = A\}$ where the signs of equalities mean equalities admitted for entities x and for entities Y respectively (see [(1), Preface]). A correspondence will be *not* understood as a set of ordered couples. The *domain* and *range of a correspondence* R will be written $\mathsf{C}\, R$, $\mathsf{D}\, R$ respectively. $E \upharpoonright R$ means the correspondence R with domain *restricted to the set* E.

3. An *ordering* (usually referred to as "partial ordering") is a non empty correspondence R (constructed or axiomatized), mainly denoted by $\leqq$, such that 1) if $a \in \mathsf{C}\, R$ or $a \in \mathsf{D}\, R$, then aRa; 2) if aRb, bRc, then aRc, 3) if a, b belong to the union of $\mathsf{C}\, R$ and $\mathsf{D}\, R$, then $a = b$ is equivalent to aRb, bRa. A *chain* (linear ordering) is an ordering satisfying the additional condition: if $a, b \in \mathsf{C}\, R \cup \mathsf{D}\, R$, then either aRb or bRa.

*) The present paper is composed under the grant of the U. S. National Science Foundation.

A *tribe* (Boolean tribe, Boolean lattice, Boolean algebra) is an ordering which is a distributive and complementary lattice $\mathfrak{B}$, see (6). A lattice $\mathfrak{B}$ is said to be *non trivial* if its unit 1_B differs from its 0_B. Elements of $\mathfrak{B}$ are called *somata* and their collection the domain of $\mathfrak{B}$. *Somatic operations* will be denoted by $+, ., =$, co, Σ, Π, (co a means $1_B - a$).

The *field* $\mathfrak{F}$ will be understood as in abstract algebra, with the exception that its domain may be composed of a single element only. In the latter case, i. e. where $1_F = 0_F$, we call the field trivial.

4. We say that a tribe $\mathfrak{B}$ is a *finitely*) genuine subtribe of* $\mathfrak{B}'$ whenever for elements of $\mathfrak{B}$ the relations $a + b = c$, $a \cdot b = c$ are respectively equivalent to $a +' b =' c$, $a \cdot' b =' c$ and if $1 =' 1'$, $0 =' 0'$. If in addition to that the equality "$=$" *governing in* $\mathfrak{B}$ is the restriction to $\mathfrak{B}$ of the equality $='$ governing in $\mathfrak{B}'$, we say that $\mathfrak{B}$ is a *finitely genuine strict subtribe of* $\mathfrak{B}'$. If $\mathfrak{B}$ and $\mathfrak{B}'$ are tribes, and there exists an operation-isomorphism $\mathfrak{T}$ from $\mathfrak{B}$ into $\mathfrak{B}'$ such that $\mathfrak{T}\mathfrak{B}$ is a finitely genuine subtribe of $\mathfrak{B}'$, we say that $\mathfrak{B}$ is a *finitely genuine subtribe* of $\mathfrak{B}'$ *through the isomorphism* $\mathfrak{T}$. A similar terminology will be used for fields $\mathfrak{F}, \mathfrak{F}'$.

5. *References* to former theorems and notions will be written e. g. [§ 2, 4], but the references to the actual section, say § 2, will be written e. g. [4] without specifying the number of the section. Numbers, as (1), refer to papers listed at the end of this paper.

6. Card B, card α, where B is a set and α an ordinal number, mean the *cardinal number* of B or α respectively. An ordinal α is said to be *distinguished* whenever it is the smallest ordinal corresponding to a given infinite cardinal. Concerning ordinals and cardinals see (2).

7. *Endings in a chain.* Let (M) be a chain, denoted by $\leqq$. Given two not empty subsets E, F of its domain M, we define the relation $E \bullet\!\leqq F$ as "for every $y \in F$ there exists $x \in E$ such that $x \leqq y$". We define $E \leqq\!\bullet F$ as "for every $x \in E$ there exists $y \in F$ such that $x \leqq y$". The relation $E \bullet\!= F$ will mean: "$E \bullet\!\leqq F$ and $F \bullet\!\leqq E$". In a similar way we define $E =\!\bullet F$. By the *right ending of* E in M, $\mathcal{RE}(E)$, we shall understand the class of all sets F such that $F =\!\bullet E$. In a similar way we define the left ending of E in M, $\mathcal{LE}(E)$. Right and left endings will be denoted normally by greek letters provided with a star, say α^*, $^*\beta$ respectively. E is called *representative of the right ending* $\mathcal{RE}(E)$ and of the *left ending* $\mathcal{LE}(E)$. We define the *inequality* $\leqq$ *for left endings* as follows $^*\alpha \leqq {}^*\beta$ will mean $E \bullet\!\leqq F$, where E, F are representatives of $^*\alpha$, $^*\beta$ respectively. In a similar way we define the *inequality* $\alpha^* \leqq \beta^*$ *for right endings*. We *define* $^*\alpha \leqq \beta^*$ by "there exist representatives E, F of $^*\alpha$, β^* respectively, such that for every $x \in E$ and every $y \in F$ we have $x \leqq y$". We *define* $\alpha^* \leqq {}^*\beta$ as "for all respresentatives E, F of α^*, $^*\beta$ respectively, we have for all $x \in E$ and all $y \in F$ the inequality $x \leqq y$". A right or left ending of a set composed of a single point a will be termed *point-ending* and will be denoted by the same letter a, if no confusion is feared.

All endings in M make up a chain "$\leqq$". The original chain is an order-genuine subchain of the chain of all endings, through isomorphism. For details and properties of endings: see [(1), § 1A, 1B, 1C].

8. By a *linearly ordered abelian semigroup*, we shall understand the structure $\mathfrak{G}$ based on the following axioms:

Addition is commutative and associative. We take a linearly ordered field $\mathfrak{F}$. The operations $a + b$, λa, where $\lambda \in \mathfrak{F}$, $a, b \in \mathfrak{G}$, $\lambda \geqq 0$ satisfy the axioms: $(\lambda + \mu) a = \lambda a + \mu a$, $\lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b$, $\lambda(\mu a) = (\lambda\mu)a$, all these for $\lambda \geqq 0$, $\mu \geqq 0$, $\lambda, \mu \in \mathfrak{F}$. There exist

---

*) We shall not use infinite operations on $\mathfrak{B}$.

the neutral element 0_G for addition: $a + 0_G = a$. We have $0_F \cdot a = 0_G$ for all $a \in \mathfrak{G}$. In addition to that we require that: if $a \leqq b$, then $a + c \leqq b + c$; if $a \leqq b$, $\lambda \geqq 0$, then $\lambda a \leqq \lambda b$; if $a \geqq 0_G$, $0 \leqq \lambda \leqq \mu$, then $\lambda a \leqq \mu a$. The cancellation law for addition *is not* admitted.

9. For not empty subsets E, F of a linearly ordered abelian semigroup $\mathfrak{G}$ (or a linearly ordered abelian group), we *define* $E + F$ as the set of all $x + y$ with $x \in E$, $y \in F$. We *define* $\lambda \cdot E$ as the set of all λx, where $x \in E$. Similar definitions are admitted for $-E$ and $E - F$.

10. Let M be a chain which, at the same time, is a linearly ordered abelian semigroup (or group). Let $*\alpha$, $*\beta$ be left endings in M. By $*\alpha + *\beta$ *we shall understand* the left ending $\mathcal{LE}(E + F)$, where E, F are representatives of $*\alpha$, $*\beta$ respectively. By $\lambda \cdot *\alpha$, where $\lambda \in F$, $\lambda \geqq 0$ *we understand* the left ending $\mathcal{LE}(\lambda E)$ where E is a representative of $*\alpha$. We define $\lambda \cdot *\alpha$ for $\lambda \leqq 0$ as the right ending $\mathcal{RE}(\lambda E)$. By $-*\alpha$ we shall understand $\mathcal{RE}(-E)$ where E is a representative of $*\alpha$. Analogous definitions are admitted for *addition* and *multiplication of right endings*. For details see [(1), § 1F].

11. The right endings in M constitute a linearly ordered abelian semigroup and so is also for the left endings in M. Consequently we can consider endings in the chain of right endings, and also we can consider endings in the chain of left endings. This process can be iterated. If M, N are two chains and N is an order genuine subchain of M, the endings in N make up an order-genuine subchain of the chain of endings in M through an easy isomorphism. We shall write e. g. $*\alpha^N$ and $*\alpha^M$ to denote the corresponding endings, just to emphasise the ordering in which endings are considered. For details see [(1), § 1 H].

12. *Partitions. By partition in a not trivial tribe* $\mathfrak{B}$ we understand a finite sequence $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $(n \geqq 1)$ of disjoint somata of $\mathfrak{B}$ with $a_1 + \cdots + a_n = 1_B$. Two partitions $\{a_i\}$, $\{b_j\}$ in $\mathfrak{B}$ are said to *be equal*, $\{a_i\} = \{b_j\}$, whenever for every i with $a_i \neq 0$ there exists j such that $a_i = b_j$, and for every j with $b_j \neq 0$ there exists i with $b_j = a_i$. A partition $\{a_i\}$ is said to be a *subpartition of* $\{b_j\}$ whenever for every i there exists j such that $a_i = b_j$. We define $\{a_i\} \cdot \{b_j\}$ as $\{a_i \cdot b_j\}$. For more details see [(1), § 3].

13. *Aggregates.* Let $\mathfrak{B}$ be a non trivial tribe and $\mathfrak{F}$ a non trivial field. By an $\mathfrak{B}\mathfrak{F}$-*aggregate* we understand a finite sequence $(a_1, \lambda_1), \ldots, (a_n, \lambda_n)$, $(n \geqq 1)$ of ordered couples, where $\{a_i\}$ is a partition in $\mathfrak{B}$ and $\lambda_j \in \mathfrak{F}$. We shall write $[\Sigma_i^{\cdot} a_i \lambda_i]$ or $[\Sigma_i^{\cdot} \lambda_i a_i]$. The aggregates $[\Sigma_i^{\cdot} a_i \lambda_i]$, $[\Sigma_j^{\cdot} b_j \mu_j]$ are said to *be equal*, whenever for every i and j with $a_i b_j \neq 0$ we have $\lambda_i = \mu_j$. We define the *sum of two aggregates*

$$[\Sigma_i^{\cdot} \lambda_i a_i] + [\Sigma_j^{\cdot} \mu_j b_j] \text{ as the aggregate } [\Sigma_{ij}^{\cdot} (\lambda_i + \mu_j)\,(a_i b_j)].$$

We define the *product* $\lambda \cdot [\Sigma_i^{\cdot} \lambda_i a_i]$, where $\lambda \in \mathfrak{F}$, as the aggregate $[\Sigma_i^{\cdot} (\lambda \lambda_i)\, a_i]$.

By the *characteristic aggregate* Ω_a *of the soma* a we shall understand the aggregate $a \cdot 1_F + \mathrm{co}\, a \cdot 0_F$. We can write, without fear of contradiction $\Sigma_i \lambda_i a_i$ instead of $[\Sigma_i \lambda_i a_i]$. For details see [(1), § 3].

§ 1.

Upper and lower measure on a finitely additive Boolean tribe where the values of measure are taken from a linearly ordered abelian group.

1. Let $\mathfrak{B}$ be a finitely additive Boolean tribe (with unit or not), and $\mathfrak{G}$ a linearly ordered abelian group. Let $\mu(a)$ be a finitely additive measure on $\mathfrak{B}$ with values taken from $\mathfrak{G}$. Notice that $\mu(a)$ *may be negative too*, differently from (1).

Let $a \in B$. Define

$$E_a \underset{\mathrm{df}}{=} \{\mu(x) \mid x \leqq a\}.$$

We have $E_a \neq \emptyset$, because $a \in E_a$. We have $E_a \leqq \mathfrak{G}$. We define

$$^*\underline{\mu}(a) \underset{\mathrm{df}}{=} \mathcal{LE}(E_a), \qquad \bar{\mu}^*(a) \underset{\mathrm{df}}{=} \mathcal{RE}(E_a).$$

We call $^*\underline{\mu}$ and $\bar{\mu}^*$ *lower and upper measure of* a respectively. The first is a left ending, the second a right ending.

2. We have $\mu(0) = 0$. Indeed $\mu(0 + 0) = \mu(0) + \mu(0)$; hence $\mu(0) = 2\mu(0)$ and then $\mu(0) = 0$.

3. *If* $b \leqq a$, *then* $^*\underline{\mu}(a) \leqq \mu(b) \leqq \bar{\mu}^*(a)$.

Proof. We have $\mu(b) \in E_a$, [Def. 1]; hence by [(1), §1A, 4], $E_a \cdot \leqq \mu(b)$. As E_a is a representative of $^*\underline{\mu}$ and $\mu(b)$ a representative of $\mathcal{LE}(\mu(b))$, it follows

(1) $$^*\underline{\mu}(a) \leqq \mu(b).$$

From $\mu(b) \in E_a$ it follows, by [(1), § 1B, 4],

$$\mu(b) \leqq \cdot\, E_a.$$

As $\mu(b)$ is a representative of the right ending of $\{\mu(b)\}$ and E_a is a representative of $\bar{\mu}^*(a)$, we get

(2) $$\mu(b) \leqq \bar{\mu}^*(a).$$

From (1) and (2) it follows

$$^*\underline{\mu}(a) \leqq \mu(b) \leqq \bar{\mu}^*(a), \qquad \text{q. e. d.}$$

4. *For every* $a \in \mathfrak{B}$ *we have*

$$^*\underline{\mu}(a) \leqq 0 \leqq \bar{\mu}^*(a).$$

Proof. Since $0 \leqq a$ and $\mu(0) = 0$, this follows.

5. Lemma. *If* $a, b \in \mathfrak{B}$, $a \cdot b = 0$, *then* $E_{a+b} = E_a + E_b$, [(1), § 1E, Def. 3].

Proof. Let $z \in E_a + E_b$. By [(1), § 1E, 4] we can find $x \in E_a$ and $y \in E_b$ with $z = x + y$. As $x \in E_a$ and $y \in E_b$, there exist $\xi, \eta \in \mathfrak{B}$ such that $\xi \leqq a$, $\mu(\xi) = x$ and $\eta \leqq b$. $\mu(\eta) = y$. Hence

(1) $$z = \mu(\xi) + \mu(\eta).$$

Now, since $a \cdot b = 0$, $\xi \leqq a$, $\eta \leqq b$, it follows that $\xi \cdot \eta = 0$, and then

$$\mu(\xi + \eta) = \mu(\xi) + \mu(\eta).$$

Hence, by (1), $z = \mu(\xi + \eta)$.

As $\xi \leqq a$, $\eta \leqq b$, we have $\xi + \eta \leqq a + b$, and then

$$z \in E_{a+b}.$$

Thus we have proved that

(2) $$E_a + E_b \leqq E_{a+b}.$$

Now, let $z \in E_{a+b}$. There exists $\zeta \leqq a + b$, $\zeta \in \mathfrak{B}$ such that

$$z = \mu(\zeta).$$

We have $\zeta = a\zeta + b\zeta$, $(a\zeta) \cdot (b\zeta) = 0$; hence $\mu(\zeta) = \mu(a\zeta) + \mu(b\zeta)$, and then $z = \mu(\zeta) \in E_a + E_b$, because $a\zeta < a$, $b\zeta < b$ which gives

$$\mu(a\zeta) \in E_a, \quad \mu(b\zeta) \in E_b.$$

Consequently

(3) $$E_{a+b} \leqq E_a + E_b.$$

From (2) and (3) the lemma follows.

6. Theorem. *If* $a, b \in \mathfrak{B}$, $a \cdot b = 0$, *then*

$$\bar{\mu}^*(a+b) = \bar{\mu}^*(a) + \bar{\mu}^*(b) \text{ and } {}^*\underline{\mu}(a+b) = {}^*\underline{\mu}(a) + {}^*\underline{\mu}(b).$$

Proof. Let E_{a+b}, E_a, E_b be representatives of ${}^*\underline{\mu}(a+b)$, ${}^*\underline{\mu}(a)$, ${}^*\underline{\mu}(b)$ respectively. By [5] we have $E_{a+b} = E_a + E_b$, hence $E_{a+b}\bullet = E_a + E_b$, and then

$${}^*\underline{\mu}(a+b) = {}^*\underline{\mu}(a) + {}^*\underline{\mu}(b).$$

In a similar way we prove the second part of the thesis.

7. Theorem. *If* $a, b \in \mathfrak{B}$, $a \leqq b$, *then* ${}^*\underline{\mu}(b) \leqq {}^*\underline{\mu}(a)$ *and* $\bar{\mu}^*(a) \leqq \bar{\mu}^*(b)$.

Proof. As $a \leqq b$, we have [1], $E_a \leqq E_b$.

By [(1), § 1A, 3] we get $E_b\bullet \leqq E_a$ and by [(1), § 1B, 3], $E_a \leqq\bullet E_b$. Since E_a, E_b are representatives of ${}^*\underline{\mu}(a)$, ${}^*\underline{\mu}(b)$ respectively, it follows

$${}^*\underline{\mu}(b) \leqq {}^*\underline{\mu}(a).$$

Since these sets are also representatives of $\bar{\mu}^*(a)$, and $\bar{\mu}^*(b)$ respectively, we get

$$\bar{\mu}^*(a) \leqq \bar{\mu}^*(b).$$

The theorem is proved.

8. Theorem (generalized Saks' theorem) **(3):**

If 1. $a \in \mathfrak{B}$,

2. *there exists* $\xi \in \mathfrak{G}$ *such that*

$$\bar{\mu}^*(a) \leqq \xi,$$

then there exists $\eta \in \mathfrak{G}$ *such that* $\eta \leqq {}^*\underline{\mu}(a)$.

Proof. Let $x \leqq a$. We have $\mu(a - x) = \mu(a) - \mu(x)$. We have $\mu(a - x) \leqq \bar{\mu}^*(a)$ on account of [3]. Hence $\mu(a) - \mu(b) \leqq \bar{\mu}^*(a) \leqq \xi$.

This being true for all $x \in \mathfrak{B}$, $x \leqq a$, it follows that for every $s \in E_a$, we have

$$\mu(a) - \xi \leqq s.$$

Hence $\mu(a) - \xi\bullet \leqq E_a$, [(1), § 1A, Def. 1], and then, since E_a is a representative of ${}^*\underline{\mu}(a)$, $\mu(a) - \xi \leqq {}^*\underline{\mu}(a)$.

If we put $\eta \underset{\mathrm{df}}{=} \mu(a) - \xi$, the thesis follows.

9. Definition. We *define* for all $a \in \mathfrak{B}$:

$$\mu^v(a) \underset{\mathrm{df}}{=} \bar{\mu}^*(a) - {}^*\underline{\mu}(a), \text{ (see [(1), § 1F, 27]) and we call } \mu^v(a)$$

variation (of measure) *on a*. This variation is a right ending.

10. *If* $a \in \mathfrak{B}$ *then* $\mu^v(a) \leqq \bar{\mu}^*(a)$, $-\mu^v(a) \leqq {}^*\underline{\mu}(a)$.

Proof. By [(1), § 1F, 27],

$$\mu^v(a) = \bar{\mu}^*(a) + (-{}^*\underline{\mu}(a)).$$

Now ${}^*\underline{\mu}(a) \leqq 0$, hence by [(1), § 1F, 31],

(1) $$-{}^*\underline{\mu}(a) \geqq 0.$$

Adding to (1) both sides $\bar{\mu}^*(a)$, we get, by [(1), § 1 F, 10],

$$\mu^v(a) \geqq \bar{\mu}^*(a) + 0 = \bar{\mu}^*(a),$$

so the first thesis is established.

To prove the second one, we write

$$\mu^v(a) = \bar{\mu}^*(a) + (-{}^*\underline{\mu}(a)),$$

which gives

$$-\mu^v(a) = -[\bar{\mu}^*(a) + (-{}^*\underline{\mu}(a)].$$

Applying [(1), 1 F, 23], we get $-\mu^v(a) = (-\bar{\mu}^*(a)) + [-(-{}^*\underline{\mu}(a))]$, hence, by [(1), § 1 F, 22],

$$(2) \qquad -\mu^v(a) = (-\bar{\mu}^*(a)) + {}^*\underline{\mu}(a).$$

Now $\bar{\mu}^*(a) \geqq 0$, (by [4]). This gives, [(1), § 1 F, 31], $-\bar{\mu}^*(a) \leqq 0$. Applying [(1), § 1 F, 10], we obtain

$$[-\bar{\mu}^*(a)] + {}^*\underline{\mu}(a) \leqq 0 + {}^*\underline{\mu}(a), \text{ hence by [(1), § 1 F, 27] and by (2),}$$

$$-\mu^v(a) \leqq {}^*\underline{\mu}(a),$$

so the second thesis is proved.

11. Theorem. *If* $a, b \in \mathfrak{B}$, $a \cdot b = 0$, *then* $\mu^v(a + b) = \mu^v(a) + \mu^v(b)$.

Proof. We have

$$\mu^v(a) = \bar{\mu}^*(a) + (-{}^*\underline{\mu}(a)),$$
$$\mu^v(b) = \bar{\mu}^*(b) + (-{}^*\underline{\mu}(b)).$$

All endings on the right are right endings. Applying the associative law for addition of right endings, we get

$$\mu^v(a) + \mu^v(b) = [\bar{\mu}^*(a) + \bar{\mu}^*(b)] + [(-{}^*\underline{\mu}(a)) + (-{}^*\underline{\mu}(b))].$$

By [6] and [(1), § 1 F, 23], we get

$$\mu^v(a) + \mu^v(b) = \bar{\mu}^*(a + b) + [-({}^*\underline{\mu}(a) + {}^*\underline{\mu}(b))], \text{ and then by [6],}$$
$$\mu^v(a) + \mu^v(b) = \bar{\mu}^*(a + b) + [-{}^*\underline{\mu}(a + b)], \text{ hence}$$
$$\mu^v(a) + \mu^v(b) = \mu^v(a + b), \qquad \text{q. e. d.}$$

12. From theorem [8] it follows that *in the case* $\mathfrak{B}$ *has a unit, and the measure* μ *is bounded from above, it is also bounded from below.* To prove this it suffices to put $a = 1$. In this case μ^v is also bounded. We see that, in any case $\mu^v(a) \geqq 0$.

§ 2.

Linear functionals of aggregates and a norm of an aggregate.

1. Let $\mathfrak{B}'$ be a finitely additive, non trivial tribe. Let $\mathfrak{B}$ be a finitely genuine strict subtribe of $\mathfrak{B}'$. We have $\mathfrak{B} \leq \mathfrak{B}'$, and both $\mathfrak{B}$ and $\mathfrak{B}'$ have the same zero and the same unit. The somata of $\mathfrak{B}$ will be denoted by $a, b, c, \ldots$ and those of $\mathfrak{B}'$ by $A, B, C, \ldots$. Let $M(a)$ be a finitely additive measure on $\mathfrak{B}$ with values taken from a given, linearly ordered, non trivial field $\mathfrak{F}$. We do not suppose that $M(a)$ is non negative. We shall consider $\mathfrak{B}'\mathfrak{F}$ aggregates, (see [(1), § 3]), using the simplified notation, mentioned in [(1), § 3, 8]:

$$(1) \qquad \Sigma_i \lambda_i A_i, \quad (\lambda_i \in \mathfrak{F}, \ A_i \in \mathfrak{B}').$$

2. We consider the variation $M^v(a)$ of measure M, as it was considered in [§ 1]. $M^v(a)$ is an $\mathfrak{F}$-right ending, and $M^v(a) \geqq 0$ for all $a \in \mathfrak{B}$. We have

$$M^v(a) = \overline{M}^*(a) = {}^*\underline{M}(a),$$

where $\overline{M}^*(a)$, ${}^*\underline{M}(a)$ are the upper and lower measure of a, derived from M, as in [§ 1]. Since $M^v(a) \geqq 0$ and is additive, by [§ 1, 11], we can use the way for defining the norm of an aggregate, similar to that used in [(1), § 5].

3. To do this we shall prove some lemmas:

Lemma. *If* $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i A_i = \sum_{j=1}^{n} \mu_j A_j$ *are* $\mathfrak{B}'\mathfrak{F}$*-aggregates, and* $a \in \mathfrak{B}$, *then*

$$\{\lambda_i \mid aA_i \neq 0\} = \{\mu_j \mid aA_j \neq 0\}.$$

Proof. Put

$$P \underset{\mathrm{df}}{=} \{\lambda_i \mid aA_i \neq 0\}, \quad Q \underset{\mathrm{df}}{=} \{\mu_j \mid aA_j \neq 0\}. \tag{1}$$

By definition of equality of aggregates we have: if $A_i \cdot A_j \neq 0$, then $\lambda_i = \mu_j$. Hence, if $A_i \neq 0$, we have $\lambda_i = \mu_i$, because $A_i \cdot A_i \neq 0$.

Let $\lambda_i \in P$. We have $aA_i \neq 0$, hence $A_i \neq 0$, and then $\lambda_i = \mu_i$. Since $aA_i \neq 0$, we get $\mu_i \in Q$, and then $\lambda_i \in Q$. Thus we have proved that

$$P \leq Q.$$

The inverse inclusion can be proved analogously, so the thesis is established.

4. **Lemma.** *If* 1. $\{A_i\}$, $\{B_l\}$ *are partitions in* $\mathfrak{B}'$,

2. $B_{kl} \underset{\mathrm{df}}{=} A_k B_l$ *for all* k *and* l,

3. $\Sigma_i \lambda_i A_i = \sum_{kl} \mu_{kl} B_{kl}$ *are* $\mathfrak{B}'\mathfrak{F}$*-aggregates,*

4. $a \in \mathfrak{B}$,

then

$$\{\lambda_i \mid aA_i \neq 0\} = \{\mu_{kl} \mid B_{kl} \neq 0\}.$$

Proof. Define $P \underset{\mathrm{df}}{=} \{\lambda_i \mid aA_i \neq 0\}$, $Q \underset{\mathrm{df}}{=} \{\mu_{kl} \mid aB_{kl} \neq 0\}$. If $A_i \cdot B_{kl} \neq 0$, then $\lambda_i = \mu_{kl}$; this by hypothesis 3.

Let $\lambda_i \in P$. We have $aA_i \neq 0$, hence $A_i \neq 0$. Since $\{A_k B_l\}$ is a partition in $\mathfrak{B}'$, there exist k', l' such that

$$aA_i \cdot A_{k'} B_{l'} \neq 0. \tag{1}$$

Taking such k', l', we obtain (1), hence $aA_i \cdot B_{k'l'} \neq 0$ which gives, by hypothesis 3, $\lambda_i = \mu_{k'l'}$. By definition of Q, we get $\mu_{k'l'} \in Q$, since $aB_{k'l'} \neq 0$. Consequently $\lambda_i \in Q$. Thus we have proved that

$$P \leq Q. \tag{2}$$

Let $\mu_{kl} \in Q$. We have $aB_{kl} \neq 0$, i. e., by hypothesis 2, $aA_k B_l \neq 0$.

It follows that $aA_k \neq 0$ and $A_k B_l \neq 0$. Hence $A_k(A_k B_l) \neq 0$, and then, by hypothesis 3

$$\lambda_k = \mu_{kl}. \tag{3}$$

Now, since $A_k \cdot a \neq 0$, it follows that $\lambda_k \in P$, so, by (3), we get $\mu_{kl} \in P$. We have proved that

$$Q \leq P. \tag{4}$$

From (3) and (4) the thesis follows.

5. Lemma. *If* 1. $\Sigma_i \lambda_i A_i = \Sigma_j \mu_j B_j$ *are* $\mathfrak{B}'\mathfrak{F}$*-aggregates,*
2. $a \in \mathfrak{B}$,

then

$$\{\lambda_i \mid aA_i \neq 0\} = \{\mu_j \mid aB_j \neq 0\}.$$

Proof. Put

$$P \underset{\mathrm{df}}{=} \{\lambda_i \mid aA_i \neq 0\}, \quad Q \underset{\mathrm{df}}{=} \{\mu_j \mid aB_j \neq 0\}.$$

We have, by [(1), § 3, 4],

$$(1) \qquad \sum_i \lambda_i A_i = \sum_{ij} \lambda_i A_i B_j,$$

$$(2) \qquad \sum_j \mu_j B_j = \sum_{ij} \mu_j A_i B_j.$$

By lemma [4] we deduce from (1) and (2)

$$P = \{\lambda_i \mid aA_i B_j \neq 0\}, \quad Q = \{\mu_j \mid aA_i B_j \neq 0\}.$$

From hypothesis 1, (1) and (2), we get

$$\sum_{ij} \lambda_i A_i B_j = \sum_{ij} \mu_j A_i B_j,$$

hence, by lemma 3,

$$\{\lambda_i \mid aA_i B_j \neq 0\} = \{\mu_j \mid aA_i B_j \neq 0\}; \text{ hence } P = Q.$$

6. From lemma [5] it follows that *if* $\sum_i \lambda_i A_i = \sum_j \mu_j B_j$ *are* $\mathfrak{B}'\mathfrak{F}$*-aggregates,* $a \in \mathfrak{B}$, $a \neq 0$, *then*

$$\max\{|\lambda_\alpha| \mid a \cdot A_\alpha \neq 0\} = \max\{|\mu_\beta| \mid a \cdot B_\beta \neq 0\}.$$

Indeed, by lemma [5], we have

$$(1) \qquad \{\lambda_\alpha \mid aA_\alpha \neq 0\} = \{\mu_\beta \mid aB_\beta \neq 0\}.$$

Now these sets are not empty, because $a \neq 0$. Indeed, as $\{A_i\}$ is a partition of 1, there exists j with $a \cdot A_j \neq 0$. From (1) it follows

$$\{|\lambda_\alpha| \mid aA_\alpha \neq 0\} = \{|\mu_\beta| \mid aB_\beta \neq 0\},$$

and then also the assertion concerning the maximums.

7. *If* $\{a_1, \ldots, a_m\}$, $(m \geqq 1)$, *is a partition of* 1 *in* $\mathfrak{B}$,

$$X = \sum_i \lambda_i A_i = \sum_j \mu_j B_j, \quad (\lambda_i, \mu_j \in \mathfrak{F}, \ A_i, B_j \in \mathfrak{B}'),$$

then

$$(2) \quad \sum_{k=1}^{m} M^v(a_k) \cdot \max\{|\lambda_\alpha| \mid a_k \cdot A_\alpha \neq 0\} = \sum_{k=1}^{m} M^v(a_k) \cdot \max\{|\mu_\beta| \mid a_k B_\beta \neq 0\},$$

the equality being that of right endings in $\mathfrak{F}$.

Proof. $M^v(a_k)$ is a right ending in $\mathfrak{F}$. Since the maxima considered are non-negative, it follows, by [(1), § 1 F, 15], that all terms in (2) are $\mathfrak{F}$-right endings. Hence their sums are, by [(1), § 1 F, 14], also right endings. By [6] the respective terms on both sides in (2) are equal, and then the equality (2) results.

8. *The expression*

$$(1) \qquad \sum_{k=1}^{m} M^v(a_k) \cdot \max\{|\lambda_\alpha| \mid a_k A_\alpha \neq 0\}$$

does not depend on the representation $\sum_i \lambda_i A_i$ of X, *so we can denote* (1) by

$$H^*[\{a_k\}, X]. \tag{2}$$

It depends on the partition $\{a_k\}$ in $\mathfrak{B}$ and on the aggregate X, being invariant with respect to the equality of partitions and that of aggregates. The expression (2) is a right ending in $\mathfrak{F}$.

9. *If* 1. *X is a $\mathfrak{B}'\mathfrak{F}$-aggregate,*

2. *$\{a_i\}$, $\{b_j\}$ are partitions of* 1 *in* $\mathfrak{B}$,

3. *$\{b_j\}$ is a subpartition of $\{a_i\}$,*

then

$$H^*[\{b_j\}, X] \leqq H^*[\{a_i\}, X],$$

the inequality being that of $\mathfrak{F}$-right endings.

Proof. By [(1), § 2, 6], there exists a partition $\{c_l\}$ in $\mathfrak{B}$ such that

$$\{b_j\} = \{a_i\} \cdot \{c_l\} = \{a_i \cdot c_l\}.$$

Hence

$$H^*[\{b_j\}, X] = H^*[\{a_i \cdot c_l\}, X]. \tag{1}$$

Let $X = \sum_\alpha \lambda_\alpha A_\alpha$, $(A_\alpha \in \mathfrak{B}'$, $\lambda_\alpha \in \mathfrak{F})$. Put

$$p_k \underset{\mathrm{df}}{=} \max\{|\lambda_\alpha| \,|\, A_\alpha \cdot a_k \neq 0\}, \quad p_{kl} \underset{\mathrm{df}}{=} \max\{|\lambda_\alpha| \,|\, A_\alpha \cdot a_k c_l \neq 0\}.$$

These definitions are meaningful, because for a given k there exists α with $A_\alpha \cdot a_k \neq 0$, and for given k, l there exists α with $A_\alpha a_k c_l \neq 0$.

We shall prove that $p_{kl} \leqq p_k$.

Choose k, l. Choose among all α with $A_\alpha \cdot a_k c_l \neq 0$ such an α' that $|\lambda_{\alpha'}| = p_{kl}$. We have $A_{\alpha'} \cdot a_k c_l \neq 0$; hence $A_{\alpha'} a_k \neq 0$.

Hence $|\lambda_{\alpha'}| \leqq \max\{|\lambda_\alpha| \,|\, A_\alpha \cdot a_k \neq 0\} = p_k$, and then $p_{kl} \leqq p_k$.

$$H^*[\{a_k\}, X] = \sum_k M^v(a_k) \cdot p_k, \quad H^*[\{a_k c_l\}, X] = \sum_{k,l} M^v(a_k c_l) \cdot p_{kl}.$$

Since $a_k = \sum_l a_k c_l$, and all $a_k c_1, a_k c_2, \ldots$ are disjoint, we have, by [§ 1, 11],

$$M^v(a_k) = \sum_l M^v(a_k c_l);$$

hence

$$H^*[\{a_k\}, X] = \sum_k \Big(\sum_l M^v(a_k c_l)\Big) \cdot p_k = \sum_k \sum_l (M^v(a_k c_l)\, p_k), \text{ by } [(1), \S 1\,\mathrm{F}, 25].$$

Applying the associative and commutative law for addition of right endings, we get

$$H^*[\{a_k\}, X] = \sum_{k,l} M^v(a_k c_l) \cdot p_k. \tag{2}$$

Now, since $M^v(a_k c_l) \geqq 0$, $p_{kl} \geqq 0$, $p_k \geqq 0$ and $p_{kl} \leqq p_k$, it follows, by [(1), § 1 F, 30], that

$M^v(a_k c_l) \cdot p_{kl} \leqq M^v(a_k c_l) \cdot p_k$. Hence, by [(1), § 1 F, 10],

$\sum_{k,l} M^v(a_k c_l) \cdot p_{kl} \leqq \sum_{kl} M^v(a_k c_l) \cdot p_k$. Consequently, by (2),

$H^*[\{a_k c_l\}, X] \leqq H^*[\{a_k\}, X]$, and then, by (1), the thesis follows.

10. Consider *the set H_X of all right endings $H^*[\{a_k\}, X]$ for a fixed X and variable $\mathfrak{B}$-partition $\{a_k\}$.* We know that the $\mathfrak{F}$-right endings make up a chain $\mathfrak{R}$. Define $^*q(X)$ as the $\mathfrak{R}$-left ending of H_X. Thus $^*q(X)$ is an iterated ending: the left ending of a set of $\mathfrak{F}$-right endings. $^*q(X)$ will be termed *norm of the $\mathfrak{B}'\mathfrak{F}$-aggregate X with respect to μ and to $\mathfrak{B}$.*

11. We shall prove some basic properties of the norm $^*q$.

Theorem. *If* 1. $\lambda \geqq 0$, $\lambda \in \mathfrak{F}$,

2. *X is a $\mathfrak{B}'\mathfrak{F}$-aggregate,*

then

$$^*q(\lambda X) = \lambda \cdot {}^*q(X).$$

Proof. We have $H^*[\{a_i\}, X] = \sum_k M^v(a_k) \cdot p_k$, where

$$X = \sum_i \lambda_i A_i, \text{ and } p_k = \max \{|\lambda_\alpha| \mid A_\alpha a_k \neq 0\}.$$

By virtue of [(1), § 1 F, 25] we get

$$\lambda \cdot H^*[\{a_i\}, X] = \sum_k \lambda [M^v(a_k) \cdot p_k] = \sum_k M^v(a_k) \cdot (\lambda p_k).$$

Since $\lambda \geqq 0$, $p_k \geqq 0$, we get

$$\lambda \cdot H^*[\{a_i\}, X] = \sum_k M^v(a_k) \cdot \max \{|\lambda \lambda_\alpha| \mid A_\alpha \cdot a_k \neq 0\} = H^*[\{a_k\}, \lambda X].$$

As the sets of endings $\lambda \cdot H^*[\{a_i\}, X]$, $H^*[\{a_i\}, \lambda X]$ for all $\mathfrak{B}$-partitions $\{a_i\}$ are equal so are their left endings. The thesis follows.

12. Theorem. *For every $\mathfrak{B}'\mathfrak{F}$-aggregate X we have*

$$^*q(-X) = {}^*q(X).$$

This is true, because, if $X = \sum_i \lambda_i A_i$, we have $-X = \sum_i (-\lambda_i) A_i$, and in the definition of H^* only the absolute values of coeficients λ_i occur.

13. Theorem. *For all $\mathfrak{B}'\mathfrak{F}$-aggregates X, Y we have*

$$^*q(X + Y) \leqq {}^*q(X) + {}^*q(Y),$$

where the inequality and addition on the right are those of left endings in the chain of $\mathfrak{F}$-right endings.

Proof. It suffices to prove that, in the chain of $\mathfrak{F}$-right endings,

$$H_{X+Y} \cdot \leqq H_X + H_Y \quad \text{(addition of sets of } \mathfrak{F}\text{-right endings).}$$

Let

$$\zeta^* \in H_X + H_Y.$$

There exists $\xi^* \in H_X$ and $\eta^* \in H_Y$, such that

$$(1) \qquad \zeta^* = \xi^* + \eta^*.$$

By definition [10], there exists a $\mathfrak{B}$-partition $\{a_i\}$ such that

$$(2) \qquad \xi^* = H^*[\{a_i\}, X],$$

and there exists a $\mathfrak{B}$-partition $\{b_k\}$, such that

$$(3) \qquad \eta^* = H^*[\{b_k\}, Y].$$

Since $\{a_i b_k\}$ is a subpartition of both $\{a_i\}$ and $\{b_k\}$, we have, by virtue of [9],

$$H^*[\{a_i b_k\}, X] \leqq H^*[\{a_i\}, X] \text{ and } H^*[\{a_i b_k\}, Y] \leqq H^*[\{b_k\}, Y].$$

From (1), (2), (3) and by [(1), § 1 F, 10 and 16] we obtain:

$$(4) \quad H^*[\{a_i b_k\}, X] + H^*[\{a_i b_k\}, Y] \leqq H^*[\{a_i\}, X] + H^*[\{b_k\}, Y] \leqq \xi^* + \eta^* = \zeta^*$$

As we know from [(1), § 3, 4], X and Y have representatives involving a same $\mathfrak{B}'$-partition, say: $X = \sum_\alpha \lambda_\alpha A_\alpha$, $Y = \sum_\alpha \nu_\alpha A_\alpha$, so that

$$X + Y = \sum_\alpha (\lambda_\alpha + \nu_\alpha) \cdot A_\alpha.$$

We have

$$H^*[\{a_i b_k\}, X] = \sum_{i,k} M^v(a_i b_k) \max \{|\lambda_\alpha| \mid A_\alpha \cdot a_i b_k \neq 0\},$$

$$H^*[\{a_i b_k\}, Y] = \sum_{i,k} M^v(a_i b_k) \max \{|\nu_\alpha| \mid A_\alpha \cdot a_i b_k \neq 0\},$$

$$H^*[\{a_i b_k\}, X + Y] = \sum_{i,k} M^v(a_i b_k) \cdot \max \{|\lambda_\alpha + \nu_\alpha| \mid A_\alpha \cdot a_i b_k \neq 0\}.$$

Since

$$\max \{|\lambda_\alpha + \nu_\alpha| \mid A_\alpha a_i b_k \neq 0\} \leqq \max \{|\lambda_\alpha| \mid A_\alpha a_i b_k \neq 0\} + \max \{|\nu_\alpha| \mid A_\alpha a_i b_k \neq 0\},$$

simple properties of right endings, concerning their addition and multiplication by quantities of $\mathfrak{F}$, give

$$H^*[\{a_i b_k\}, X + Y] \leqq H^*[\{a_i b_k\}, X] + H^*[\{a_i b_k\}, Y].$$

Hence, putting $\delta^* \underset{\mathrm{df}}{=} H^*[\{a_i b_k\}, X + Y]$, we get, from (1),

$$\delta^* \leqq \zeta^*. \tag{5}$$

Now $\delta^* \in H_{X+Y}$, and ζ^* is an arbitrary element of $H_X + H_Y$. Hence for every $\zeta^* \in H_X + H_Y$ there exists $\delta^* \in H_{X+Y}$, such that (5) holds true. Hence

$$H_{X+Y} \cdot \leqq H_X + H_Y, \quad \text{and then}$$
$$^*q(X + Y) \leqq {}^*q(X) + {}^*q(Y), \quad \text{q. e. d.}$$

14. Theorem. *If $X = \sum_i a_i \lambda_i$ is a $\mathfrak{B}\mathfrak{F}$-aggregate, then its $\mathfrak{B}$-M-norm $^*q(X)$ is an $\mathfrak{B}$-"point" ending, whose one of its representatives is the class composed of a single $\mathfrak{F}$-right ending $\sum_i M^v(a_i) \cdot |\lambda_i|$.*

Proof. Let $\{a_{ik}\}$ be a subpartition of $\{a_i\}$, where $\sum_k a_{ik} = a_i$ (See [(1), § 2]). We have

$$H^*[\{a_{ik}\} \cdot X] = \sum_{i,k} M^v(a_{ik}) \cdot \max \{|\lambda_\alpha| \mid a_{ik} a_\alpha \neq 0\}.$$

Now, if $a_{ik} \cdot a_\alpha \neq 0$, then $\sum_k a_{ik} a_\alpha \neq 0$, i. e. $a_i \cdot a_\alpha \neq 0$, and then $i = \alpha$, and $a_{ik} \neq 0$. Conversely, if $i = \alpha$ and $a_{ik} \neq 0$, we have $a_{ik} \cdot a_\alpha = a_{ik} \cdot a_i = a_{ik} \neq 0$.

It follows that

$$\max \{|\lambda_\alpha| \mid a_{ik} \cdot a_\alpha \neq 0\} = \max \{|\lambda_\alpha| \mid a_{ik} \neq 0, i = \alpha\} = |\lambda_i|.$$

Hence

$$H^*[\{a_{ik}, X] = \sum_{i,k} M^v(a_{ik}) \cdot |\lambda_i|,$$

and then, by simple properties of right endings,

$$H^*[\{a_{ik}\}, X] = \sum_i \Big(\sum_k M^v(a_{ik})\Big) |\lambda_i| = \sum_i M^v(a_i) \cdot |\lambda_i|.$$

The above equality holds true whatever the $\mathfrak{B}$-partition $\{a_{ik}\}$ of $\{a_i\}$ may be. Hence $H^*[\{a_{ik}\}, X]$ is constant for all subpartitions $\{a_{ik}\}$ of $\{a_i\}$. Having this, take any $\mathfrak{B}$-partition $\{b_j\}$. The partition $\{a_i b_j\}$ is a subpartition of $\{a_i\}$. Hence

$$H^*[\{a_i b_j\}, X] = \sum_i M^v(a_i) |\lambda_i|.$$

We also have, by lemma [9],

$$H^*[\{a_i b_j\}, X] \leqq H^*[\{b_j\}, X].$$

Consequently we have for every $\mathfrak{B}$-partition $\{b_j\}$

$$\sum_i M^v(a_i) \cdot |\lambda_i| \leqq H^*[\{b_j\}, X], \text{ so } \sum_i M^v(a_i) \cdot |\lambda_i| \text{ is the minimum in } G_X.$$

Since G_X admits a minimum, $^*q(X)$ is a single element ending in the chain of all $\mathfrak{F}$-right endings. $\sum_i M^v(a_i) \cdot |\lambda_i|$ is its representative. The theorem is proved.

15. *For every $\mathfrak{B}'\mathfrak{F}$-aggregate X the $\mathfrak{B}$-M-norm of X, $^*q(X)$ is non negative.* i. e.

$$^*q(X) \geqq 0,$$

where 0 represents the single-element $\mathfrak{R}$-ending whose one of the representatives is the quantity $0 \in \mathfrak{F}$. This follows from the fact that for every $\mathfrak{B}$-partition $\{a_i\}$, the expression $H^*[\{a_i\}, X]$ is an $\mathfrak{F}$-right ending which is $\geqq 0$.

16. *The collection V of all $\mathfrak{B}\mathfrak{F}$-aggregates makes up a linear space with multipliers taken from $\mathfrak{F}$. If we define*

$$f(X) = \sum_i M(a_i) \cdot \lambda_i,$$

where

$$X = \sum_i \lambda_i a_i, \tag{1}$$

the value $f(X)$ does not depend on the representation (1) *of X. The function $f(X)$ is a linear functional defined on V, admitting multipliers taken from $\mathfrak{F}$,* i. e.

$f(X + Y) = f(X) + f(Y)$ for all $X, Y \in V$, and $f(\lambda X) = \lambda f(X)$ for all $X \in V$ and $\lambda \in \mathfrak{F}$.

17. We shall prove that *for every $X \in V$, ($\mathfrak{B}\mathfrak{F}$-aggregates)*

$$f(X) \leqq {}^*q(X).$$

Proof. By [14]

$$^*q(X) = \sum_i M^v(a_i) \cdot |\lambda_i| \text{ whenever } X = \sum_i a_i \lambda_i.$$

To prove the assertion it suffices to establish the inequality

$$\sum_i M(a_i) \cdot \lambda_i \leqq \sum_i M^v(a_i) \cdot |\lambda_i|. \tag{1}$$

Now, we have, by [§ 1, 3],

$$M(a) \leqq \overline{M}^*(a), \text{ and by [§ 1, 4] } {}^*\underline{M}(a) \leqq 0.$$

It follows that $-{}^*\underline{M}(a) \geqq 0$, and then

$$M(a) \leqq \overline{M}^*(a) + [-{}^*\underline{M}(a)] = M^v(a). \tag{2}$$

We also have, by [§ 1, 3] ${}^*\underline{M}(a) \leqq M(a)$, and by [§ 1, 4] $\overline{M}^*(a) \geqq 0$. Hence $-\overline{M}^*(a) \leqq 0$. It follows that ${}^*\underline{M}(a) + (-\overline{M}^*(a)) \leqq M(a)$ and hence $-[-{}^*\underline{M}(a) + \overline{M}^*(a)] \leqq M(a)$, which gives

$$-M^v(a) \leqq M(a). \tag{3}$$

From (2) and (3) we get

$$|M(a)| \leqq M^v(a). \tag{4}$$

Now $$\sum_i M(a_i)\,\lambda_i \leqq \left|\sum_i M(a_i)\,\lambda_i\right| \leqq \sum_i |M(a_i)| \cdot |\lambda_i|,$$

and then $$\sum_i M(a_i)\,\lambda_i \leqq \sum_i M^v(a_i) \cdot |\lambda_i|.$$

Consequently

$$f(X) \leqq {}^*q(X), \qquad \text{q. e. d.}$$

Remark. The last inequality is that of left-endings of sets of $\mathfrak{F}$-right endings. $f(X)$ does not mean a quantity of $\mathfrak{F}$, but a single-element left ending in $\mathfrak{R}$, whose representative is a point ending induced by the quantity $f(X)$ of $\mathfrak{F}$, in the chain of $\mathfrak{F}$-endings.

§ 3.

Construction of a well ordering of linearly ordered fields.

1. The method will be similar to that used in [(1), § 7], so we refer to this paper for notions and notations. We make the following assumptions:

$\mathfrak{B}$ is a non trivial finitely additive tribe and $\mathfrak{B}'$ its all-operations-zero-and-unit-genuine strict superfield of $\mathfrak{B}$. So we have $1_B = 1_{B'}$, $0_B = 0_{B'}$, $\mathfrak{B} \leqq \mathfrak{B}'$. We admit that $\mathfrak{B}' \neq \mathfrak{B}$.

φ_0 is a linearly ordered not trivial field. $\mu(a)$ is a finitely additive measure on $\mathfrak{B}$ with values taken from φ_0. We do not admit that $\mu(a) \geqq 0$. In order to extend the measure over the wider field $\mathfrak{B}'$, we shall make stepwise extensions of φ_0, so as to get a suitable well ordering of wider and wider fields. Each step will be a proper or apparent linear elementary extension, (see [(1), § 6]). Since a proper elementary extension of an abstract field can be made only through isomorphism, hence with the change of the logical type of quantities, and since we shall need to construct a field which will contain all above extensions, we must apply methods shown in [(1), § 6], concerning the unification of logical types of these various extensions. The construction will be given in sketch only, with the exception of those passages which differ from the analogous ones of paper (1). The last passages will be treated more explicitely.

2. Let

(1) $$Q_1, Q_2, \ldots, Q_\lambda, \ldots$$

be a distinguished well ordering of different elements with power $\aleph$, where $\aleph >$ max (card φ_0, card $\mathfrak{B}'$). Its domain will be denoted by $\{Q_\lambda\}$.

Let

(2) $$s_1, s_2, \ldots, s_\beta, \ldots$$

be a well ordering of different somata, with domain $\mathfrak{B}$. Let v_0 be the linear space composed of all $\mathfrak{B}\varphi_0$-aggregates x, with multipliers taken from φ_0. We consider the linear functional

$$g_0(x) = \sum_{i=1}^{n} \mu(a_i)\, q_i$$

where $x = \sum_{i=1}^{n} a_i q_i$, $(a_1, \ldots, a_n \in \mathfrak{B};\ q_i \in \varphi_0)$, defined on v_0, (compare [§ 2, 16]). g_0 is φ_0-valued and its domain is composed of all $\mathfrak{B}\varphi_0$-aggregates.

3. We construct the auxiliary linearly ordered field Φ_0 all-operation isomorphic to φ_0, and with elements taken from $\{Q_\lambda\}$, as in [(1), § 7, 6]. The isomorphism involved

transforms $\mathfrak{B}\varphi_0$-aggregates x into $\mathfrak{B}\Phi_0$-aggregates X, and the space v_0 into another space, denoted by V_0. The transformed linear functional $g_0(x)$ will be a linear functional, denoted by $G_0(X)$. The transformed measure will be denoted by μ_0. Its values are in Φ_0. We have for all $X \in V_0$

$$G_0(X) \leqq {}^*q^{\Phi_0}(X),$$

where ${}^*q^{\Phi_0}(X)$ is the $\mu_0\mathfrak{B}$-norm of X. It is a left ending of a set of Φ_0-right endings, (see [§ 2]).

4. Denoting by τ the logical type of the elements of $\{Q_\lambda\}$, we know [(1), § 6, 36] that the quantities of elementary proper or apparent extensions of Φ_0 can be chosen so, as to have for them a uniform type, say $\sigma(\tau)$, the same whatever the character of the extension (improper, algebraic or transcendental) may be. Consider all chains C whose domains are composed of elements of type τ, and also consider all chains C', whose domains have elements of type $\sigma(\tau)$. Having two chains C, C', there may exist an order-isomorphism $\mathfrak{M}$ from C onto C'. Consider the class of all possible such isomorphisms with variable C and C', and order well this class:

$$\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots, \mathfrak{M}_\gamma, \ldots, \tag{3}$$

where all elements of (3) are different, (see [(1), § 7, 7)]. We have the following lemma, [(1), § 7, 8]:

Lemma. *If $C_1' C_2'$ are linearly ordered fields with elements of type $\sigma(\tau)$, C_1' is a strict subfield of C_2', card $C_2' < \aleph$. C_1 is a field with $C_1 \leqq \{Q_\lambda\}$, T_1 an isomorphism from C_1' onto C_1, then there exists C_2 with $C_2 \leqq \{Q_\lambda\}$ and an isomorphism $\mathfrak{T}_2$ from C_2' onto C_2 such that C_1 is a strict subfield of C_2, and $\mathfrak{T}_1 = C_1' \upharpoonright \mathfrak{T}_2$. In addition to that $\mathfrak{T}_1^{-1}$, $\mathfrak{T}_2^{-1}$ belong to* (3).

5. Let

$$W_1, W_2, \ldots, W_\delta, \ldots \tag{4}$$

be a well ordering of all different elements, each of which being a linear operation-and-order-genuine strict superfield of Φ_0 with elements belonging to $\{Q_\lambda\}$.

6. Starting with the entities Φ_0, V_0, $G_0(X)$ defined in [2], we shall construct a well ordering $\Phi_0, \Phi_1, \ldots, \Phi_\alpha, \ldots$ of linearly ordered fields whose domains are included in $\{Q_\lambda\}$, (see [(1), § 7, 9]).

Let $\alpha \geqq 1$ be an ordinal with card $\alpha < \aleph$. Suppose that we have already constructed the fields Φ_β, the spaces V_β and the linear functionals $G_\beta(X)$ for all $\beta < \alpha$, $\beta \geqq 0$, and suppose that the following properties hold true for every $\beta < \alpha$, $\beta \geqq 0$:

1) $\Phi_\beta < \{Q_\lambda\}$.
2) if $\beta' \leqq \beta'' < \beta$, then $\Phi_{\beta'}$ is an all-operation-and-order-genuine strict subfield of $\Phi_{\beta''}$.
3) V_β is a linear space, with multipliers taken from Φ_0, and composed of some $\mathfrak{B}'\Phi_0$-aggregates.
4) If $\beta' \leqq \beta'' \leqq \beta$, then $V_{\beta'} \leq V_{\beta''}$.
5) $G_\beta(X)$ is a linear Φ_β-valued functional defined on V_β with multipliers taken from Φ_0.
6) If $\beta' \leqq \beta'' \leqq \beta$, and $X \in V_{\beta'}$, then $G_{\beta'}(X) = G_{\beta''}(X)$.
7) For every $X \in V_\beta$ we have $G_\beta(X) \leqq {}^*q^{\Phi_\beta} X$, where the right hand side is the $\mathfrak{B}\mu_0$-norm of X, taken in the ordering of Φ_β-right endings.
8) Card $\Phi_\beta < \aleph$.

We shall construct $\Phi_\alpha, V_\alpha, G_\alpha$ such that for $\beta = \alpha$ the conditions 1)—8) are satisfied.

To do this some preparations are needed. First of all we notice that from 1)—8) the following properties are resulting:

2⁰) if $\beta' < \beta'' < \alpha$ then $\Phi_{\beta'}$ is an all-operation-and-order-genuine strict subfield of $\Phi_{\beta''}$,

3⁰) if $\beta' < \beta'' < \alpha$, then $V_{\beta'} \leq V_{\beta''}$,

6⁰) if $\beta' < \beta'' < \alpha$, then $G_{\beta'}(X) = G_{\beta''}(X)$ for all $X \in V_{\beta'}$.

We start with definition of the following auxiliary entities

$$\Phi^{\cdot}_\alpha,\ V^{\cdot}_\alpha,\ G^{\cdot}_\alpha(X), \text{ as in } [(1), \S\, 7, 11, 12, 13].$$

$\Phi^{\cdot}_\alpha$ is defined as the field with domain $\bigcup\limits_{\beta<\alpha} \Phi_\beta$ and operations and order defined by those in Φ_β. The field Φ_β is an all-operation-and-order-genuine strict linear subfield of $\Phi^{\cdot}_\alpha$. We have card $\Phi^{\cdot}_\alpha < \aleph$. We define

$$V^{\cdot}_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} V_\beta.$$

This space is composed of some $\mathfrak{B}'\Phi^0$-aggregates. It is a linear space with multipliers taken from Φ_0. We define $G^{\cdot}_\alpha(X)$ on $V^{\cdot}_\alpha$ as follows: Let $X \in V^{\cdot}_\alpha$. There exists $\beta < \alpha$ such that $X \in V_\beta$. We put $G^{\cdot}_\alpha(X) \underset{\mathrm{df}}{=} G_\beta(X)$; $G^{\cdot}_\alpha(X)$ is a $\Phi^{\cdot}_\alpha$-valued linear functional on $V^{\cdot}_\alpha$ with multipliers taken from Φ_0.

We get, as in [(1), § 7, 14],

$$G^{\cdot}_\alpha(X) \leqq {}^*q^{\Phi^{\cdot}_\alpha}(X) \text{ for all } X \in V^{\cdot}_\alpha.$$

If $\alpha - 1$ exists, then the entities $\Phi^{\cdot}_\alpha, V^{\cdot}_\alpha, G^{\cdot}_\alpha(X)$ coincide with $\Phi_{\alpha-1}, V_{\alpha-1}$ and $G_{\alpha-1}(X)$ respectively.

7. It may happen that $V^{\cdot}_\alpha$ contains the characteristic aggregates of all somata of $\mathfrak{B}'$. If so, the process stops through the formation of $\Phi^{\cdot}_\alpha$.

8. Let us suppose that $V^{\cdot}_\alpha$ does not contain the characteristic aggregates of all somata of $\mathfrak{B}'$. Under this hypothesis we are going to construct the entities Φ_α, V_α and $G_\alpha(X)$ as follows: For the sake of simplicity we shall drop the index α if no ambiguity will be feared.

There exists a soma A_0 of $\mathfrak{B}'$ whose characteristic $\mathfrak{B}'\Phi_0$-aggregate (see [(1), § 5, 11])

$$X_0 = \Omega_{A_0} = A_0 \cdot 1 + \mathrm{co}\, A_0 \cdot 0$$

does not belong to $V^{\cdot}$. (The coeficients 1, 0 can be understood as belonging to $\Phi^{\cdot}_\alpha$. We shall apply the known Banach's device, (4) and [(1), § 7, 18]: Let $x_1, x_2 \in V^{\cdot}$. We have, by [6],

$$G^{\cdot}(x_2 - x_1) \leqq {}^*q^{\Phi^{\cdot}}(x_2 - x_1) = {}^*q[(-x_1 - X_0) + (x_2 + X_0)] \leqq {}^*q(-x_1 - X_0) + {}^*q(x_2 + X_0).$$

Hence

$$G^{\cdot}(x_2) - G^{\cdot}(x_1) \leqq {}^*q(x_1 + X_0) + {}^*q(x_2 + X_0)$$

where the high index $\Phi^{\cdot}$ is dropped for simplicity.

We get just in the same way as in [(1), § 7, 18],

$$-G^{\cdot}(x) - {}^*q(x_1 + X_0) \leqq -G^{\cdot}(x_2) + {}^*q(x_2 + X_0).$$

Both sides of this inequality are right endings of sets of $\Phi^{\cdot}$-right endings. By [(1), § 1 G, 6], we obtain

$$C^* \underset{\mathrm{df}}{=} \mathcal{RE}\{-G^{\cdot}(x) - {}^*q(x + X_0) \,|\, x \in V^{\cdot}\} \leqq \mathcal{LE}\{-G^{\cdot}(x) + {}^*q(x + X_0 \,|\, x \in V^{\cdot}\} \underset{\mathrm{df}}{=} {}^*D.$$

By [(1), § 1 K, 2, 3] there exists a unique smallest right ending γ^* (of sets of $\Phi^{\cdot}$-right endings) and a unique greatest left ending $^*\delta$ such that

$$C^* \leqq \gamma^*, \quad {}^*\delta \leqq {}^*D.$$

Thus we get the inequality

$$(1) \quad -G^{\cdot}_{\alpha}(x) - {}^*q^{\Phi^{\cdot}_{\alpha}}(x + X_0) \leqq \gamma^* \leqq {}^*\delta \leqq -G^{\cdot}_{\alpha}(x) + {}^*q^{\Phi^{\cdot}_{\alpha}}(x + X_0),$$

which is valid for all $x \in V^{\cdot}_{\alpha}$.

9. There are two cases to be considered separately;

case 1): there does not exist any quantity $\varrho' \in \Phi^{\cdot}_{\alpha}$ such that $\gamma^* \leqq \varrho' \leqq {}^*\delta$,

case 2): there is such a quantity ϱ'.

10. We shall consider the first case. We know that the ordering of the quantities of $\Phi^{\cdot}_{\alpha}$ is an order-genuine subordering of the chain of all $\Phi^{\cdot}_{\alpha}$-right endings through order-isomorphism, and this chain is in turn an order-genuine subchain of the chain of all right and left endings of sets whose elements are $\Phi^{\cdot}_{\alpha}$-right endings, through order-isomorphism.

Let Γ be the set of all quantities a in $\Phi^{\cdot}_{\alpha}$ such that $a \leqq \gamma^*$ and Δ the set of all quantities b in $\Phi^{\cdot}_{\alpha}$ such that $^*\delta \leqq b$. We have $\Gamma \cup \Delta = \Phi^{\cdot}_{\alpha}$ and $\Gamma \cap \Delta = \emptyset$, so Γ, Δ make up a gap in the linear ordering of $\Phi^{\cdot}_{\alpha}$ (see [(1), § 6, 29].

Γ can not admit a maximum, because if so, we would have the case 2). Analogously Δ does not admit a minimum. Consequently the gap is either proper algebraic or proper non-algebraic, [(1), § 6, 31]. Denote by φ_{α} the linearly ordered field, with elements of type $\sigma(\tau)$, which constitutes the corresponding elementary linear extension of $\Phi^{\cdot}_{\alpha}$ through a well determined isomorphism, denoted by $\mathfrak{A}^{-1}_{\alpha}$. Let $\varphi^{\cdot}_{\alpha}$ be the $\mathfrak{A}^{-1}_{\alpha}$ image of $\Phi^{\cdot}_{\alpha}$, and let ϱ'' (of type $\sigma(\tau)$) be a quantity in φ_{α} which fills up the gap, [(1), § 6, 37]. $\varphi^{\cdot}_{\alpha}$ is an order-genuine strict subfield of φ_{α} and $\mathfrak{A}^{\cdot}_{\alpha}$ is the isomorphism from $\varphi^{\cdot}_{\alpha}$ onto $\Phi^{\cdot}_{\alpha}$, where $\Phi^{\cdot}_{\alpha} \leqq \{Q_{\lambda}\}$. We are in the conditions of Lemma [4]. There exists an isomorphism $\mathfrak{M}_{\gamma}$ taken from [4, (3)] such that $A^{\cdot}_{\alpha} = \varphi^{-1}_{\alpha} \restriction \mathfrak{M}^{-1}_{\gamma}$ and where $\Phi^{\cdot}_{\alpha}$ is an all-operation-and-order-genuine strict subfield of Φ_{α}. Take $\mathfrak{M}_{\gamma}$ with the smallest index and denote it by $\mathfrak{A}^{-1}_{\alpha}$. Putting $\Phi_{\alpha} = \mathfrak{A}_{\alpha}(\varphi_{\alpha})$, we get $\Phi^{\cdot}_{\alpha} \leqq \Phi_{\alpha}$, $\Phi_{\alpha} \leqq \{Q_{\lambda}\}$ and $\varphi_{\alpha} \xrightarrow{\mathfrak{A}_{\alpha}} \Phi_{\alpha}$, $\varphi^{\cdot}_{\alpha} \xrightarrow{\mathfrak{A}_{\alpha}} \Phi^{\cdot}_{\alpha}$.

We define

$$(1) \quad \varrho_{\alpha} \underset{\mathrm{df}}{=} \mathfrak{A}_{\alpha}(\varrho'').$$

We have $\varrho_{\alpha} \in \Phi_{\alpha}$. If there is no proper extension of $\Phi^{\cdot}_{\alpha}$, we get back $\Phi^{\cdot}_{\alpha} = \Phi_{\alpha}$ and $\varrho_{\alpha} = \varrho''$. Thus we have got a linear extension Φ_{α} of the field $\Phi^{\cdot}_{\alpha}$.

In the second case [9], there is already available a linear extension of $\Phi^{\cdot}_{\alpha}$, viz. $\Phi^{\cdot}_{\alpha}$ itself, since there exists ϱ_{α} such that

$$\gamma^* \leqq \varrho_{\alpha} \leqq {}^*\delta.$$

There may be many quantities ϱ_{α}. To have a definite construction, we take this extension of $\Phi^{\cdot}_{\alpha}$ which in [5, (4)] has the smallest index, and if, nevertheless, there will be several elements ϱ_{α} filling up the gap, we shall take this one which, in [2, (1)] has the smallest index.

11. We have obtained a well determined superfield Φ_{α} of $\Phi^{\cdot}_{\alpha}$ where $\Phi_{\alpha} \leqq \{Q_{\lambda}\}$, $\varrho_{\alpha} \in \Phi_{\alpha}$, and where, by [8, (1)],

$$-G^{\cdot}_{\alpha}(x) - {}^*q^{\Phi^{\cdot}_{\alpha}}(x + X_0) \leqq \varrho_{\alpha} \leqq -G^{\cdot}_{\alpha}(x) + {}^*q^{\Phi^{\cdot}_{\alpha}}(x + X_0) \text{ for all } x \in V^{\cdot}_{\alpha}.$$

Hence we get for isomorphic images generated in Φ_{α}:

$$-G_{\alpha}(x) - {}^*q^{\Phi_{\alpha}}(x + X_0) \leqq \varrho_{\alpha} \leqq -G_{\alpha}(x) + {}^*q^{\Phi_{\alpha}}(x + X_0)$$

which is valid for all $x \in V^{\cdot}_{\alpha}$.

12. Define the space V_α as the set of all aggregates $x + tX_0$, where $x \in V'_\alpha$, $t \in \Phi_0$. If $Y \in V_\alpha$, then Y amits a unique representation

$$Y = x + tX_0, \quad \text{where} \quad x \in V'_\alpha, \quad t \in \Phi_0.$$

V_α is a linear space with multipliers taken from Φ_0. It is composed of some $\mathfrak{B}'\Phi_0$-aggregates. We have $V'_\alpha \leq V_\alpha$.

Define, for all aggregates $Y = x + tX_0 \in V_\alpha$ the functional $G_\alpha(Y)$, by putting

$$G_\alpha(x + tX_0) \underset{\mathrm{df}}{=} G'_\alpha(x) + t\varrho_\alpha.$$

G_α is a linear functional in V_α with multipliers taken from Φ_0.

As in [(1), § 7, 24] we prove that $G_\alpha(Y) \leqq {}^*q^{\Phi_\alpha}(Y)$.

13. Having defined Φ_α, V_α and $G_\alpha(X)$ we prove as in [(1), § 7, 25] that these entities fulfill all requirements specified in [6]. This being done, the transfinite induction yields the well ordering of more and more ample linearly ordered fields

$$\Phi_0 \leqq \Phi_1 \leqq \cdots \leqq \Phi_\alpha \leqq \cdots$$

whose elements belong to $\{Q_\lambda\}$, and consequently, have the same logical type. It yields also a well ordering

$$G_0(X), G_1(X), \ldots, G_\alpha(X), \ldots$$

of linear functionals defined on the spaces

$$V_0 \leqq V_1 \leqq \cdots \leqq V_\alpha \leqq \cdots \quad \text{respectively.}$$

The elements of all these spaces are $\mathfrak{B}'\Phi_0$-aggregates, and $G_\alpha(X)$ is Φ_α-valued with multipliers taken from Φ_0. The inductive process must stop at Φ'_γ for some ordinal γ where card $\gamma < \aleph$. The space V'_γ contains the characteristic aggregates of all somata of $\mathfrak{B}'$. If we put for all $A \in \mathfrak{B}'$

$$\mu'(A) \underset{\mathrm{df}}{=} G'(\Omega_A) \quad \text{where} \quad \Omega_A = A \cdot 1 + \mathrm{co}\, A \cdot 0,$$

we obtain an additive Φ'_γ-valued measure on $\mathfrak{B}'$. For $A \in \mathfrak{B}$ we get $\mu'(A) = \mu_0(A)$. Thus the following theorem is proved.

14. Theorem. *If* 1. *$\mathfrak{B}$ and $\mathfrak{B}'$ are finitely additive Boolean tribes,*

2. *$\mathfrak{B}$ is a finitely genuine strict subtribe of $\mathfrak{B}'$* [i. e. *with equality, finite operations, zero and unit on $\mathfrak{B}$ taken from $\mathfrak{B}'$*], *and $\mathfrak{B} \leq \mathfrak{B}'$,*
3. *φ_0 is a non trivial linearly ordered field,*
4. *$\mu(a)$ is a φ_0-valued, finitely additive measure on $\mathfrak{B}$,* (*which may be not $\geqq 0$*),

then there exists a linearly ordered field Φ and a finitely additive, Φ-valued measure $M(A)$ on $\mathfrak{B}'$ such that

1) *φ_0 is an all-operations-and-order-genuine subfield of Φ through an isomorphism $\mathfrak{T}$,*
2) *$M(a) = \mathfrak{T}^\mu(a)$ for all $a \in \mathfrak{B}$,*
3) card $\Phi \leqq \max$ (card φ_0, card $\mathfrak{B}'$).

15. Corollary. *If* 1. 2. 3. 4. *as before, in theorem* [14], *$p \in \varphi_0$, and for every $a \in \mathfrak{B}$ we have $\mu(a) \leqq p$, then*

$$M(A) \leqq \mathfrak{T}(p) \text{ for all } A \in \mathfrak{B}'.$$

In this case the extended measure is bounded.

Proof. To prove this, we take into account the proof of the theorem [14] and rel on the following theorem:

If $A \in \mathfrak{B}'$, and Ω_A is the characteristic aggregate of A, then

$$*q(\Omega_A) = M^v(A).$$

Indeed,

$$H^*[\{a_i\}, \Omega_A] = \sum_{k=1}^{m} M^v(a_k) \cdot \max\{|\lambda_\alpha| \mid a_k \cdot A_k \neq 0\}, \text{ where } A_1 = A,\ A_2 = \text{co } A$$

$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 0.$

The set $\{|\lambda_\alpha| \mid a_k A_k \neq 0\}$ is composed of the numbers $1, 0$ only. If $A \neq 0$, then exists k with $a_k A_k \neq 0$ and $\lambda_k = 1$; hence

$$\max\{|\lambda_\alpha| \mid a_k \cdot A_k \neq 0\} = 1.$$

We have

$$H^*[\{a_i\},\ \Omega_A] = \Sigma_i' M^v(a_i)$$

where the summation Σ_i' is taken over all a_i for which $a_i A \neq 0$. Since all a_i related t this summation are disjoint with one another, and since $\Sigma_i' M^v(a_i) = M^v(\Sigma_i' a_i)$, and sinc $\Sigma_i' a_i$ may be any soma $a \in \mathfrak{B}$ such that $A \leq a$, it follows that

$$\mathcal{LE}(H^*\Omega_A) \leqq M^v(A), \text{ i e. } \quad *q(\Omega_A) \leq M^v(A).$$

Having this we proceed as follows: Since for all $a \in \mathfrak{B}$ we have $\mu(a) \leq \mathfrak{T}(p)$, it follow that $*q(\Omega_A) \leqq \mathfrak{T}(p)$. Since $G(X) \leqq *q(X)$ for all $\mathfrak{B}'\Phi$-aggregates, we get $M(A) \leqq \mathfrak{T}(p)$, s the theorem is proved.

References.

(1) *Otton Martin Nikodým*, On extension of a given field-valued, non negative measure on a finitely additi Boolean tribe to another one more ample. Rendiconti del Seminario Matematico di Padova **26** (195 232–327.

(2) *Otton Martin Nikodým* and *Stanisława Nikodým*. Sur l'extension des corps algébriques abstraits par un proc généralisé de Cantor. Rendiconti dell'Accademia Nazionale dei Lincei (Classe de scienze fisiche, matem tiche e naturali) (8) **17** (1954), 334–339.

(3) *S. Saks*, Theory of the Integral. New York 1937.

(4) *S. Banach*, Operacje linjowe. Warszawa 1931.

(5) *B. Russell* and *N. Whitehead*, Principia mathematicae. Vol I, Cambridge (England) 1910.

(6) G. *Birkhoff*, Lattice theory. 2d edition. New York 1948 [Amer. Math. Soc. Coll. Publ. **25**].

Eingegangen 8. Januar 1957.

Wesentliche Komponenten bei Gitterpunktmengen. II.

Von *Friedrich Kasch* in Heidelberg.

1. Es sollen hier eine Verschärfung von Satz 2 der im Titel genannten Note[1]) und zwei ergänzende Bemerkungen mitgeteilt werden. Der Beweis der Verschärfung wird ausführlich dargestellt, da der Beweis von Satz 2 in (I) durch Rechen- und Druckfehler entstellt ist. Die Verschärfung von Satz 2 besteht in folgender Aussage:

Unter den Voraussetzungen von Satz 2 gilt

$$\gamma \geqq \alpha\left(1 + c\,\frac{1-\alpha}{\lambda}\right), \tag{1}$$

wobei für c jeder Wert zulässig ist, der zu beliebigem $q > 1$ durch

$$c = c(q) = \frac{1}{(r+1)^{r+1} q^r} \operatorname*{Min}_{k=1,\ldots,r} \{(q-1)^k (r+1-k)\} \tag{2}$$

gegeben wird.

Da man für $r = 1$ bessere Abschätzungen hat, interessiert hier nur der Fall $r \geqq 2$, was im folgenden stets gelten soll. Ist dann bei festem r der Wert $q = q_m$ so, daß c in (2) maximal wird, so gilt $2 \leqq q_m \leqq 3$, wie anschließend gezeigt wird. Der genaue Wert von q_m soll nicht bestimmt werden. Bereits

$$c(3) = \frac{1}{(r+1)^{r+1}} \cdot \frac{2r}{3^r}$$

ist größer als der in (I) angegebene Wert $c = \dfrac{1}{(3(r+1))^r}$; für $r \geqq 7$ gilt ferner $c(2) > c(3)$.

Entsprechend kann man den Faktor c an allen Stellen, wo er in (I) vorkommt[2]), durch einen durch (2) bestimmten Wert ersetzen.

Zum Beweis von (1) überlegen wir zunächst:

$$\begin{cases} c(2) \geqq c(q) \text{ für } 1 < q \leqq 2, \\ c(3) \geqq c(q) \text{ für } 3 \leqq q, \end{cases} \tag{3}$$

so daß wir uns im Beweis auf $2 \leqq q \leqq 3$ beschränken können. Das Minimum von $(q-1)^k (r+1-k)$ für $k = 1, \ldots, r$ wird für $1 < q \leqq 2$ bei $k = r$ und für $q \geqq 3$ bei $k = 1$ angenommen. Dann gilt also

$$c(q) = \frac{1}{(r+1)^{r+1}} \left(1 - \frac{1}{q}\right)^r \text{ für } 1 < q \leqq 2,$$

$$c(q) = \frac{1}{(r+1)^{r+1}} \frac{(q-1)\,r}{q^r} \text{ für } 3 \leqq q,$$

woraus unmittelbar (3) folgt. Wir setzen jetzt (außer $r \geqq 2$) $2 \leqq q \leqq 3$ voraus.

---

[1]) Dieses Journal **197** (1957), 203—215, im folgenden mit (I) zitiert; wir übernehmen alle Definitionen, Bezeichnungen und Zitate aus (I).

[2]) Also insbesondere in (I 15), (I 16), (I 17).

Wie in (I) wird zunächst angenommen, daß mindestens eine der Komponenten von $\mathfrak{n} = (n_1, \ldots, n_r)$ größer oder gleich $q(r+1)$ sei. Die Indizierung sei so, daß

$$n_i + 1 > q(r+1) \text{ für } i = 1, \ldots, k \qquad (k \geqq 1),$$
$$n_i + 1 \leqq q(r+1) \text{ für } i = k+1, \ldots, r$$

gelte. Wir setzen

$$n_i' = \left[\frac{n_i+1}{r+1}\right] \text{ für } i = 1, \ldots, k;$$
$$n_i' = 0 \qquad \text{für } i = k+1, \ldots, r;$$
$$\mathfrak{n}_i = (n_1, \ldots, n_{i-1}, n_i' - 1, n_{i+1}, \ldots, n_r) \text{ für } i = 1, \ldots, k;$$
$$\mathfrak{n}' = (n_1', \ldots, n_r').$$

Dann gibt es zu jedem Gitterpunkt $\mathfrak{m}$ mit $\mathfrak{m} \leqq \mathfrak{n}$, $\mathfrak{n}' \nleqq \mathfrak{m}$ mindestens ein i mit $\mathfrak{m} \leqq \mathfrak{n}_i$.

Die Anzahl der Gitterpunkte $\bar{\mathfrak{a}} \in \overline{\mathfrak{A}}(\mathfrak{n})$ mit $\mathfrak{n}' \leqq \bar{\mathfrak{a}} \leqq \mathfrak{n}$ bezeichnen wir mit $\bar{A}(\mathfrak{n}', \mathfrak{n})$; dann gilt

$$(4) \quad \bar{A}(\mathfrak{n}', \mathfrak{n}) \geqq \bar{A}(\mathfrak{n}) - \sum_{i=1}^{k} \bar{A}(\mathfrak{n}_i) \geqq \bar{A}(\mathfrak{n}) - (1-\alpha) \sum_{i=1}^{k} N(\mathfrak{n}_i)$$
$$= \bar{A}(\mathfrak{n}) - (1-\alpha) \sum_{i=1}^{k} \left\{(n_1+1)\cdots(n_{i-1}+1)\left[\frac{n_i+1}{r+1}\right](n_{i+1}+1)\cdots(n_r+1) - 1\right\}$$
$$\geqq \bar{A}(\mathfrak{n}) - (1-\alpha)\frac{k}{r+1} N(\mathfrak{n}).$$

Aus $n_i + 1 > q(r+1)$ $(i = 1, \ldots, k)$ folgt

$$n_i + 1 \leqq \frac{q}{q-1}(r+1)\left[\frac{n_i+1}{r+1}\right] \qquad (i = 1, \ldots, k);$$

unter Beachtung von $n_i + 1 \leqq q(r+1)$ $(i = k+1, \ldots, r)$ erhält man daher

$$N(\mathfrak{n}) = \prod_{i=1}^{r}(n_i+1) - 1 \leqq \frac{1}{(q-1)^k}(q(r+1))^r \prod_{i=1}^{k}\left[\frac{n_i+1}{r+1}\right].$$

Wegen

$$N(\mathfrak{n}') = \prod_{i=1}^{k}\left(\left[\frac{n_i+1}{r+1}\right] + 1\right) - 1 \geqq \prod_{i=1}^{k}\left[\frac{n_i+1}{r+1}\right]$$

folgt

$$(5) \qquad \frac{(q-1)^k}{(q(r+1))^r} N(\mathfrak{n}) \leqq N(\mathfrak{n}').$$

Für die Gitterpunkte $\bar{\mathfrak{a}}$ mit $\mathfrak{n}' \leqq \bar{\mathfrak{a}} \leqq \mathfrak{n}$ gilt $N(\bar{\mathfrak{a}}) \geqq N(\mathfrak{n}')$; also erhält man aus (4) und (5)

$$\sum_{\bar{\mathfrak{a}} \in \overline{\mathfrak{A}}(\mathfrak{n})} N(\bar{\mathfrak{a}}) \geqq \frac{(q-1)^k}{(q(r+1))^r}\left\{\bar{A}(\mathfrak{n}) - (1-\alpha)\frac{k}{r+1} N(\mathfrak{n})\right\} N(\mathfrak{n}).$$

Damit folgt aus (I 8)

$$\frac{C(\mathfrak{n})}{N(\mathfrak{n})} \geqq \frac{A(\mathfrak{n})}{N(\mathfrak{n})} + c_1 \frac{\alpha}{\lambda}\left\{\frac{\bar{A}(\mathfrak{n})}{N(\mathfrak{n})} - \frac{k}{r+1}(1-\alpha)\right\} \text{ mit } c_1 = \frac{(q-1)^k}{(q(r+1))^r}.$$

Wie in (I 13) erhält man nun

$$\frac{C(\mathfrak{n})}{N(\mathfrak{n})} \geqq \alpha\left(1 + c_1 \frac{r+1-k}{r+1}\frac{1-\alpha}{\lambda}\right),$$

so daß (1) für $k = 1, \ldots, r$ mit dem durch (2) gegebenen Faktor folgt.

Für den noch zu behandelnden Fall $n_i + 1 \leqq q(r+1)$ $(i = 1, \ldots, r)$ bemerken wir, daß es wegen

$$\frac{1}{r+1} \operatorname*{Min}_{k=1,\ldots,r} \{(q-1)^k (r+1-k)\} \leqq \frac{1}{r+1} \operatorname*{Min}_{k=1,\ldots,r} \{q^k (r+1-k)\} \leqq 3$$

für $2 \leqq q \leqq 3$ genügt,

$$\gamma \geqq \alpha \left(1 + \frac{3}{(q(r+1))^r} \frac{1-\alpha}{\lambda}\right) \tag{6}$$

nachzuweisen. Für $A(\mathfrak{n}) = N(\mathfrak{n})$ bleibt der Schluß aus (I) richtig. Ist $A(\mathfrak{n}) < N(\mathfrak{n})$, so gilt (I 14); wegen $N(\mathfrak{n}) \leqq (q(r+1))^r$ und $\alpha(1-\alpha) \leqq \frac{1}{4}$ folgt daraus (6), womit auch jetzt unsere Behauptung erfüllt ist.

2. In (I) hatten wir die asymptotische Dichte durch

$$\alpha^* = \varliminf_{\mathfrak{n} \in \mathfrak{N}} \frac{A(\mathfrak{n})}{N(\mathfrak{n})}$$

definiert. Dieser Dichtebegriff ist nicht translationsinvariant und dürfte daher ungeeignet für Überlegungen sein, die etwa darauf abzielen, eine zum asymptotischen Dichtesatz von M. Kneser [5] analoge Abschätzung zu gewinnen. Translationsinvariante Begriffe erhält man durch die folgenden

Definitionen: 1. $\tilde{\alpha} = \tilde{\alpha}(\mathfrak{A})$ sei die größte Zahl mit der Eigenschaft, daß es zu beliebig vorgegebenem $\varepsilon > 0$ einen Gitterpunkt $\mathfrak{n}_\varepsilon$ gibt mit $\frac{A(\mathfrak{n})}{N(\mathfrak{n})} \geqq \tilde{\alpha} - \varepsilon$ für alle $\mathfrak{n} \geqq \mathfrak{n}_\varepsilon$.

2. $\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}(\mathfrak{B})$ sei die kleinste Zahl mit der Eigenschaft, daß es zu beliebig vorgegebenem $\varepsilon > 0$ einen Gitterpunkt $\mathfrak{n}_\varepsilon$ gibt mit

$$\frac{1}{N(\mathfrak{n})} \sum_{\mathfrak{m} \in \mathfrak{N}(\mathfrak{n})} l(\mathfrak{m}) \leqq \tilde{\lambda} + \varepsilon$$

für alle $\mathfrak{n} \geqq \mathfrak{n}_\varepsilon$.

Die Begriffe α^* und λ^* erhält man aus diesen Definitionen, wenn man darin $\mathfrak{n} \geqq \mathfrak{n}_\varepsilon$ durch $\mathfrak{n} \not< \mathfrak{n}_\varepsilon$ ersetzt.

Wir haben diese Definitionen hier angegeben, weil für die dadurch gegebenen Größen die Abschätzung

$$\tilde{\gamma} \geqq \tilde{\alpha} \left(1 + \frac{1}{(r+1)^{r+1}} \frac{1-\tilde{\alpha}}{\tilde{\lambda}}\right) \tag{7}$$

gilt, die besser als (1) ist. Der Beweis, der auf dem gleichen Ansatz wie der von (1) beruht, soll nicht ausgeführt werden.

3. In (I) wird darauf hingewiesen, daß man Basisabschätzungen der hier betrachteten Art auf beliebige Punktmengen im r-dimensionalen Raum übertragen kann, wenn man dafür die Begriffe Dichte, Basis usw. im Sinne von L. Chatrowsky [1] einführt. Es soll hier noch bemerkt werden, daß man für diese Begriffe eine zu (7) analoge Abschätzung beweisen kann.

Eingegangen 22. März 1957.

Axiomatischer Aufbau der Kreisgeometrie auf Grund von Doppelverhältnissen[1]).

Von *Walter Benz* in Mainz.

Einleitung.

1. In den neueren Untersuchungen und axiomatischen Begründungen der Kreisgeometrie spielt der *Berührsatz* eine ausschlaggebende Rolle[2]). Er besagt: Liegt der Punkt P auf dem Kreis k, der Punkt Q nicht, dann gibt es durch P, Q genau einen Kreis k' der mit k nur den Punkt P gemeinsam hat. — Neben einem Reichhaltigkeitsaxiom und der Forderung, daß durch drei verschiedene Punkte ein und nur ein Kreis geht, verbürgt er bereits zu jedem Punkt W die Existenz einer affinen (entsprechend projektiven) Ebene $E(W)$: Ihre Geraden sind die Kreise durch W, ihre „Punkte" sind die Punkte bis auf W[3]).

Auf dem Fundament des Berührsatzes und der beiden anderen Forderungen (wir wollen dieses Fundament eine *zyklische Ebene* nennen) aufbauend, haben van der Waerden, Smid [15] gezeigt, daß die zusätzliche Annahme des vollen Satzes von Miquel (Axiom V in [15]) zu einem kommutativen Körper $\mathfrak{K}$ führt derart, daß sich in der affinen Ebene $E(\mathfrak{K})$ über $\mathfrak{K}$ (sie ist zu den Ebenen $E(W)$ isomorph) die von den Geraden in $E(\mathfrak{K})$ verschiedenen axiomatischen Kreise (in klassischer Weise) durch quadratische Formen mit festem quadratischem Anfangsstück beschreiben lassen.

Ebenfalls unter Zugrundelegung einer zyklischen Ebene zeigte Ewald [2], daß die zusätzliche Annahme gewisser Orthogonalitätseigenschaften und die des *Büschelsatzes* (Liegen von vier Paaren lauter verschiedener Punkte in fünf Fällen je zwei Paare auf einem Kreis und sind diese Kreise alle verschieden, dann liegen auch im sechsten Fall die Paare auf einem Kreis) zu einem dreidimensionalen projektiven Raum $\mathfrak{R}$ über einem Körper $\mathfrak{K}$ führt dergestalt, daß die Ausgangspunkte bzw. Ausgangskreise durch die Punkte bzw. ebenen Schnitte einer in $\mathfrak{R}$ eingebetteten konvexen Quadrik wiedergegeben werden[4]).

Petkantschin [10] geht in seiner axiomatischen Begründung der Kreisgeometrie — unter Annahme von im wesentlichen Trennungseigenschaften und Eigenschaften von Möbiusabbildungen — bis zum klassischen Fall vor (mit Hilfe schließlich eines Stetigkeitsaxioms). Hier ist natürlich der Berührsatz erfüllt.

Eine axiomatische Begründung der Kugelgeometrie hat Hoffman [6] gegeben: Unter Zugrundelegung eines *zyklischen Raumes* (vgl. a. a. O. Axiome 1.1 bis 1.4; hier ist wegen

---

[1]) D 77.

[2]) Ewald [2], Hoffman [6], Hoffman [7], *Hoffman*, Die Inzidenzmatrix in der Geometrie (Vortrag gehalten im Math. Kolloq. der Joh.-Gutenberg-Universität Mainz, 1956. Wird veröffentlicht), Petkantschin [10], Smid [13], v. d. Waerden, Smid [15].

[3]) v. d. Waerden, Smid [15].

[4]) In einer demnächst erscheinenden Arbeit des Verfassers über „Beziehungen zwischen Orthogonalitäts- und Anordnungseigenschaften in Kreisebenen" wird gezeigt, daß $\mathfrak{K}$ ein angeordneter kommutativer Körper ist, in dem jedes nichtnegative Element Quadrat ist.

xiom 1.4 jede Kugel zyklische Ebene) führen schwache Eigenschaften von Inversionen n Kreis zu einem angeordneten kommutativen Körper, in dem jedes nichtnegative lement Quadrat ist. Dieser Körper beschreibt in klassischer Weise die Ausgangs-eometrie.

2. Die folgenden axiomatischen Untersuchungen über Kreisgeometrie, die den Begriff es Doppelverhältnisses an den Anfang stellen, führen nun zu Kreisgeometrien, in denen ie Gültigkeit des Berührsatzes einen Ausnahmefall darstellt. Welche Reichhaltigkeit an reisgeometrie — unabhängig vom Berührsatz — noch zu erwarten ist, mag ein Beispiel ner Nicht-Berührsatz-Geometrie (vgl. § 7, Geometrie Ω) beleuchten, in der neben ivialen Verknüpfungsaxiomen der Satz von Miquel und der Büschelsatz erfüllt ist und der eine Relation „=" zwischen Winkeln[5]) $(ab;\ S)$ (geordnetes Kreispaar zweier sich indestens in zwei verschiedenen Punkten schneidender Kreise a, b und ein Schnitt-unkt S) definiert werden kann mit den Eigenschaften:

$\mathfrak{W}_1$: „=" ist eine Äquivalenzrelation.

$\mathfrak{W}_2$ (Eigenschaft der Abtragbarkeit): Ist α ein vorgegebener Winkel, a ein vor-egebener Kreis, sind T, T' vorgegebene verschiedene Punkte auf a, so gibt es genau inen Kreis $x \ni T, T'$ mit $\alpha = (ax;\ T)$.

$\mathfrak{W}_3$: Satz über den Sehnentangentenwinkel.

$\mathfrak{W}_4$: Satz über die Winkelsumme im Kreisdreieck[6]).

Zeichnet man — etwa in dieser Geometrie Ω oder in der Geometrie Ψ (vgl. § 1) — inen Punkt W aus und nennt man alle Kreise durch W „Geraden" und die von W ver-chiedenen Punkte „Punkte", so kommt man freilich zu keiner affinen Ebene: Zu einer Geraden" gibt es durch einen nicht auf ihr gelegenen „Punkt" mehrere Nicht-chneidende.

Abgesehen von gewissen Verallgemeinerungen werden die folgenden Geometrien xiomatisch begründet und genauer untersucht: Ist $\mathfrak{K}_2$ ein kommutativer Körper, $\mathfrak{K}_1$ ein chter Unterkörper von $\mathfrak{K}_2$, so seien die Elemente von $\mathfrak{K}_2$ neben einem weiteren „∞" die Ausgangspunkte und — A, B, C seien verschiedene Punkte — die Mengen[7])

$$(ABC) = \{A, B, C\} \cup \left\{ X \,\middle|\, \begin{bmatrix} A & B \\ X & C \end{bmatrix} \in \mathfrak{K}_1 - \{0, 1\} \right\}$$

ie Ausgangskreise. Dabei ist

$$\begin{bmatrix} A & B \\ X & C \end{bmatrix} = \frac{A - C}{B - C} : \frac{A - X}{B - X}$$

gesetzt (mit dem Symbol ∞ wird in bekannter Weise gerechnet)[8]).

U. a. gibt § 1 das Axiomensystem und — hieraus abgeleitet — den multiplikativen Doppelverhältniskalkül. Identitäten innerhalb dieses Kalküls bedeuten gemäß § 2 Winkel-

---

[5]) Mit einem Winkelbegriff in der Kreisgeometrie — der wesentlich auf der Gültigkeit des Berührsatzes beruht — hat sich axiomatisch Smid [13] beschäftigt.

[6]) Im klassischen Falle nennen wir Kreisdreieck das kreisverwangte Abbild eines gewöhnlichen Dreiecks.

[7]) Die Menge aller X einer Grundmenge $\mathfrak{G}$ mit der Eigenschaft $\mathfrak{E}$ wird durch $\{X \mid \mathfrak{E}\}$ bezeichnet.

[8]) In anderem Zusammenhang treten gewisse dieser Geometrien bei Freudenthal [4] auf. Speziell im Zusammenhang mit dem Satz von Miquel benutzt Peczar [8] solche Geometrien. Den Fall $[\mathfrak{K}_2 : \mathfrak{K}_1] = 2$ hat Hoffman [7] näher untersucht.

sätze $\left(\begin{bmatrix} A & B \\ D & C \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & C \\ B & D \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & D \\ C & B \end{bmatrix} = -1\right.$ ergibt z. B. den Satz über die Winkelsumme im Kreisdreieck; vgl. Satz 17$\Big)$ und insbesondere Schließungssätze (wie die Peczarsche Identität; vgl. Satz 4).

In § 2 wird ein allgemeiner Begriff *Winkel*, besser *Büschelecke*, definiert. Zum Beweise von Büscheleckenbeziehungen werden die Axiome unmittelbar angewandt, in den Sätzen 6, 7, 8 $\Big($hier gibt z. B. die Identität $\begin{bmatrix} A & B \\ D & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D & C \\ A & B \end{bmatrix}$ sofort den Satz über den Sehnentangentenwinkel$\Big)$, 9 und insbesondere in den Sätzen 10, 11, welch letztere den Begriff „Gleichheit von Doppelverhältnissen" veranschaulichen. (Diese Veranschaulichung ist nützlich bei gewissen Entwicklungen des § 4; ab Satz 25 bis einschließlich Satz 26.)

Die Axiome gehen auch unmittelbar in Satz 20 ein, in dem — im Falle von Berührsatzgeometrien — der Anschluß an den Winkelbegriff von Smid hergestellt wird.

Die Büschelecken sind in ihrer Gesamtheit durch die Faktorgruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{U}$ beschreibbar (§ 3); $\mathfrak{G}$ bedeutet dabei die multiplikative Gruppe der Doppelverhältnisse, $\mathfrak{U}$ die Untergruppe der engen (s. § 1) Doppelverhältnisse. Die Involutionen von $\mathfrak{G}/\mathfrak{U}$ repräsentieren spezielle Büschelecken, die Orthogonalecken genannt werden. Sie bilden zusammen mit der Nullbüschelecke eine Untergruppe der Gruppe aller Büschelecken. Im Falle der Geometrie Ψ gibt es verschiedene Orthogonalecken. Gilt der Berührsatz, so hat man genau eine Orthogonalecke, wenn es vier verschiedene Punkte A, B, C, D mit $\begin{bmatrix} A & B \\ D & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ gibt.

Bei der Untersuchung von Trennungseigenschaften in $\beta\gamma\pi$-Kreisquaternaren (Definition in § 1) spielt der multiplikative Doppelverhältniskalkül eine gegenüber dem additiven ausgezeichnete Rolle (Sätze 24, 24′, wo — man vergleiche hierzu Sperner [14], § 4 — die harmonischen Fälle $Z = 1, 3$ betrachtet werden); selbst bei einer vollen Anordnung läßt sich das starke Monotoniegesetz der Addition leicht mit Hilfe von Doppelverhältnisrelationen ohne vorherige Entwicklung des additiven Kalküls formulieren.

Eine Addition von Doppelverhältnissen wird in § 5 eingeführt. Man kommt so zu den bereits zitierten Körpern $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$.

Satz 30 (§ 6) gibt — in der Doppelverhältnissprechweise — eine dem Berührsatz gleichwertige Bedingung an. Algebraisch läuft sie auf $[\mathfrak{K}_2 : \mathfrak{K}_1] = 2$ hinaus.

In der Geometrie Ω (hier ist $[\mathfrak{K}_2 : \mathfrak{K}_1] = 4$) gilt — wie schon einmal gesagt — ausnahmslos der Büschelsatz. Hingegen gilt der Büschelsatz nicht ausnahmslos in der Geometrie Ψ (vgl. § 1). Satz 31 gibt eine algebraische Bedingung an, die im wesentlichen der Gültigkeit des Büschelsatzes äquivalent ist, keinesfalls aber der Bedingung $[\mathfrak{K}_2 : \mathfrak{K}_1] = 2$.

Für die Anregung zu dieser Arbeit und Ratschläge bei der Abfassung bin ich meinem hochverehrten Lehrer, Herrn Professor Furch, zu Dank verpflichtet.

§ 1. Axiomensystem. Die multiplikative Gruppe.

Es seien $\mathfrak{P} = \{A, B, C, D, \ldots\}$ und $\Theta = \{t, \ldots\}$ abstrakte Mengen mit $|\mathfrak{P}| \geqq 4$ und $|\Theta| \geqq 1$[9]). Die Elemente der Menge $\mathfrak{P}$ nennen wir *Punkte*. Ein Punkte-n-tupel A_i (mit endlichem n) heiße *eigentlich*, wenn $|\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}| = n$ ist. Es sei σ eine eindeutige

[9]) Ist $\mathfrak{M}$ eine Menge, so wird mit $|\mathfrak{M}|$ ihre Mächtigkeit bezeichnet.

bbildung der Menge der geordneten eigentlichen Punktequadrupel auf Θ. Ist t das Bild on $ABCD$ bei der Abbildung σ, so wird $\sigma(ABCD) = t$ oder $ABCD \to t$ geschrieben; heiße auch das *Doppelverhältnis* des geordneten eigentlichen Quadrupels A, B, C, D.

Δ sei eine echte (eventuell leere) Teilmenge von Θ. Dann erklären wir *Kreise* (relativ Δ) ermittels der Struktur $(\mathfrak{P}; \Theta; \sigma)$: Ist A, B, C ein eigentliches Punktetripel, so wird unter em *Kreis* (ABC) neben den Punkten A, B, C die Menge der Punkte X verstanden, für ie das Doppelverhältnis von $ABCX$ in Δ liegt.

Die Elemente von Δ heißen *eng* (relativ Δ); Punktequadrupel, deren Doppelverhältnis ng ist, heißen selbst auch *eng*.

Statt $A_1B_1C_1D_1 \to t$, $A_2B_2C_2D_2 \to t$ wollen wir auch $\begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ D_1 & C_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ D_2 & C_2 \end{bmatrix}$ schreiben es liegt gewiß eine Gleichheitsrelation vor) und insbesondere statt $ABCD \to t$ auch $\begin{bmatrix} A & B \\ D & C \end{bmatrix} = t$ oder $t = \begin{bmatrix} A & B \\ D & C \end{bmatrix}$. Sind keine Verwechslungen zu befürchten, so kürzen wir $\begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ D_1 & C_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ D_2 & C_2 \end{bmatrix}$ durch ${}^1\begin{bmatrix} A & B \\ D & C \end{bmatrix}^2$ ab. An Stelle von $\begin{bmatrix} A & B \\ D & C \end{bmatrix} = t \in \Delta$ wird auch gegentlich $\begin{bmatrix} A & B \\ D & C \end{bmatrix} \in \Delta$ geschrieben.

Wir betrachten nun *allgemeine Kreisquaternare*; das sind Strukturen $(\mathfrak{P}; \Theta > \Delta; \sigma)$, ie den folgenden Eigenschaften genügen:

KQ 1. *Ist A, B, C, D, E ein eigentliches Punktequintupel, so folgt aus $\begin{bmatrix} A & B \\ D & C \end{bmatrix} \in \Delta$, $\begin{bmatrix} A & B \\ E & D \end{bmatrix} \in \Delta$ die weitere Relation $\begin{bmatrix} A & B \\ E & C \end{bmatrix} \in \Delta$.*

KQ 2. *Ist A, B, C, D ein eigentliches Punktequadrupel, so folgen aus $\begin{bmatrix} A & B \\ D & C \end{bmatrix} \in \Delta$ die weiteren Relationen $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \in \Delta$, $\begin{bmatrix} A & C \\ D & B \end{bmatrix} \in \Delta$, $\begin{bmatrix} B & A \\ D & C \end{bmatrix} \in \Delta$.*

Grob gesprochen bedeuten KQ 1, KQ 2, daß durch drei verschiedene Punkte genau ein Kreis aus $(\mathfrak{P}; \Theta > \Delta; \sigma)$ bestimmt ist. Genauer hat man die Sätze 1_1, 1_2.

Satz 1_1. *Gegeben sei eine Struktur $(\mathfrak{P}; \Theta; \sigma)$. Gewisse Teilmengen der Menge $\mathfrak{P}$ seien als Kreise ausgezeichnet mit den Eigenschaften:*

(1) *Es gibt einen Punkt P und einen Kreis k mit $P \notin k$.*

(2) *Zu drei verschiedenen Punkten gibt es genau einen Kreis, dem sie angehören. Jeder Kreis besitzt mindestens drei verschiedene Punkte.*

(3) *Sind A_1, B_1, C_1, D_1 und A_2, B_2, C_2, D_2 eigentliche Punktequadrupel, liegen die Punkte A_1, B_1, C_1, D_1 gemeinsam in einem Kreise und gilt ${}^1\begin{bmatrix} A & B \\ D & C \end{bmatrix}^2$, so gehören auch A_2, B_2, C_2, D_2 gemeinsam einem Kreise an.*

Bildet man dann die Menge Δ aller $t \in \Theta$, für die es vier — gemeinsam einem Kreise angehörende — Punkte A, B, C, D mit $ABCD \to t$ gibt, so ist $(\mathfrak{P}; \Theta > \Delta; \sigma)$ ein allgemeines Kreisquaternar, dessen Kreise genau die Ausgangskreise sind.

Beweis. Nach (1), (2) gibt es vier verschiedene Punkte A_1, B_1, C_1, D_1, die nicht gemeinsam einem Kreise angehören. Nach (3) gibt es kein eigentliches — gemeinsam einem Kreise angehörendes — Punktequadrupel A_2, B_2, C_2, D_2 mit ${}^1\begin{bmatrix} A & B \\ D & C \end{bmatrix}^2$. Damit ist $t \in \Theta - \Delta$, wo $A_1B_1C_1D_1 \to t$. — Da KQ 1, KQ 2 trivialerweise gelten, ist $(\mathfrak{P}; \Theta > \Delta; \sigma)$ ein allgemeines Kreisquaternar Σ. Daß die Ausgangskreise genau die Kreise von Σ sind,

folgt so: Ist $a = \{A, A', A'', \ldots\}$ ein Ausgangskreis und sind A, A', A'' verschiedene Punkte, so ist $a = \{A, A', A''\} \cup \left\{X \,\middle|\, \begin{bmatrix} A & A' \\ X & A'' \end{bmatrix} \in \Delta\right\}$; a ist also der Kreis $(A A' A'')$ von Σ. Jeder Kreis (PQR) von Σ ist andererseits ein Ausgangskreis; durch die drei verschiedenen Punkte P, Q, R geht nämlich genau ein Ausgangskreis p, für den wieder $p = \{P, Q, R\} \cup \left\{X \,\middle|\, \begin{bmatrix} P & Q \\ X & R \end{bmatrix} \in \Delta\right\}$ hergeleitet werden kann.

Bemerkung zu Satz 1_1. Ist $\mathfrak{P}$ eine Menge, in der gewisse Teilmengen als Kreise ausgezeichnet sind mit den Eigenschaften (1), (2), so kann man — neben anderen Möglichkeiten — mit einer Methode, die auf v. Staudt zurückgeht, in folgender Weise zu den Voraussetzungen von Satz 1_1 kommen[10]). Ist $\gamma(\mathfrak{P})$ eine Gruppe von Kreisverwandtschaften über $\mathfrak{P}$ und sind A, B, C, D und A', B', C', D' eigentliche Quadrupel, so heiße $\begin{bmatrix} A & B \\ D & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A' & B' \\ D' & C' \end{bmatrix}$, wenn es eine Kreisverwandtschaft $k \in \gamma(\mathfrak{P})$ gibt mit $kA = A'$, $kB = B'$, $kC = C'$, $kD = D'$[11]). Die Menge der Gleichheitsklassen, in die die Menge der geordneten eigentlichen Punktequadrupel auf diese Weise zerlegt wird, heiße Θ. — Jedes geordnete eigentliche Quadrupel q gehört genau einer Gleichheitsklasse an, d. h. genau einem Element t von Θ. Die Zuordnung $q \to t$ sei die Abbildung σ. Die genannte gruppentheoretische Korrespondenz läßt sich auch bezüglich unserer weiteren Axiome Q 0, Q 1, Q 2 einfach fortführen. Allerdings sind dabei Abschwächungen (vgl. § 2) von Axiom Q 2 nicht möglich.

Im gleichen Zusammenhang wie Satz 1_1 gilt

Satz 1_2. *Die Kreise eines allgemeinen Kreisquaternars* $(\mathfrak{P}; \Theta \supset \Delta; \sigma)$ *genügen den Eigenschaften* (1), (2), (3) *von Satz* 1_1.

Beweis. Da Δ echte Teilmenge von Θ ist, hat man (1). Ebenfalls folgt (3) unmittelbar aus der Definition des allgemeinen Kreisquaternars. Für (2) ist noch zu zeigen, daß drei verschiedene Punkte höchstens einem Kreise angehören; wir sind fertig, wenn wir bewiesen haben, daß aus $P, Q, R \in (ABC)$ stets $(PQR) \geqq (ABC)$ folgt, wo PQR und ABC eigentliche Punktetripel sind. Ist $\{A, B, C\} = \{P, Q, R\}$, so zeigt dies KQ 2. In den übrigen Fällen $\{A, B, C\} \cap \{P, Q, R\} \neq \emptyset$ reduziert sich jeweils der jetzt zu gebende Beweis für den Fall $\{A, B, C\} \cap \{P, Q, R\} = \emptyset$. — Wegen KQ 1, KQ 2 folgt aus $\begin{bmatrix} A & B \\ P & C \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} A & B \\ Q & C \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} A & B \\ R & C \end{bmatrix} \in \Delta$ die Aussage $\begin{bmatrix} A & B \\ Q & P \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} A & B \\ R & P \end{bmatrix} \in \Delta$, d. h. $\begin{bmatrix} A & P \\ Q & B \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} A & P \\ R & B \end{bmatrix} \in \Delta$ nach KQ 2. Also ist $\begin{bmatrix} A & P \\ R & Q \end{bmatrix}$ bzw. $\begin{bmatrix} P & Q \\ A & R \end{bmatrix}$ Element von Δ. Entsprechend ist $\begin{bmatrix} P & Q \\ B & R \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} P & Q \\ C & R \end{bmatrix} \in \Delta$ und also $A, B, C \in (PQR)$. Sei nun X ein Punkt mit $\begin{bmatrix} A & B \\ X & C \end{bmatrix} \in \Delta$ und $X \notin \{A, B, C, P, Q, R\}$. Mit $\begin{bmatrix} A & B \\ P & C \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} A & B \\ Q & C \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} A & B \\ R & C \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} A & B \\ X & C \end{bmatrix} \in \Delta$ ist $\begin{bmatrix} A & B \\ P & X \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} A & B \\ Q & X \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} A & B \\ R & X \end{bmatrix} \in \Delta$, d. h. $\begin{bmatrix} A & X \\ P & B \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} A & X \\ Q & B \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} A & X \\ R & B \end{bmatrix} \in \Delta$ bzw. weiter $\begin{bmatrix} A & X \\ Q & P \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} A & X \\ R & P \end{bmatrix} \in \Delta$, d. h. $\begin{bmatrix} P & X \\ Q & A \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} P & X \\ R & A \end{bmatrix} \in \Delta$. Damit ist schließlich $\begin{bmatrix} P & X \\ R & Q \end{bmatrix} \in \Delta$ bzw. $\begin{bmatrix} P & Q \\ X & R \end{bmatrix} \in \Delta$, d. h. $X \in (PQR)$.

[10]) Die Eigenschaften (1), (2) sind mit den Axiomen I bis IV von v. d. Waerden, Smid [15] äquivalent. Sie sind auch äquivalent mit den Axiomen A 1 bis A 4 in Petkantschin [9] oder den Axiomen 1 a) bis 1 c) in Ewald [

[11]) Vgl. Prüfer [12], wo — in projektivem Zusammenhang — genau so vorgegangen wird.

Zwei verschiedene Kreise eines allgemeinen Kreisquaternars *schneiden* sich nach Satz 1_2 in höchstens zwei verschiedenen Punkten. Ist genau ein Schnittpunkt S vorhanden, so *berühren* sie sich. — Gehört die Punktmenge $P, Q, \ldots$ gemeinsam einem Kreise an, so soll sie insgesamt *konzyklisch* heißen. Stets werden auch Redewendungen benutzt wie: *ein Kreis geht durch einen Punkt, ein Punkt liegt auf einem Kreis* usf.

Eine Struktur $(\mathfrak{P}; \Theta; \sigma)$ heiße *Quaternar*, wenn die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

Q 0. *Ist A, B, C ein eigentliches Punktetripel und $t \in \Theta$, so besitzt $\begin{bmatrix} A & B \\ X & C \end{bmatrix} = t$ genau eine Lösung $X \in \mathfrak{P} - \{A, B, C\}$.*

Q 1. *Sind A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 und A_2, B_2, C_2, D_2, E_2 eigentliche Punktequintupel, so folgt aus ${}^1\begin{bmatrix} A & B \\ D & C \end{bmatrix}^2$, ${}^1\begin{bmatrix} A & B \\ E & D \end{bmatrix}^2$ die weitere Gleichung ${}^1\begin{bmatrix} A & B \\ E & C \end{bmatrix}^2$.*

Wir haben auch Quaternare zu betrachten, in denen zusätzlich gilt

Q 2. *Sind A_1, B_1, C_1, D_1 und A_2, B_2, C_2, D_2 eigentliche Punktequadrupel mit ${}^1\begin{bmatrix} A & B \\ D & C \end{bmatrix}^2$, so gelten*

$$\alpha)\ {}^1\begin{bmatrix} B & A \\ D & C \end{bmatrix}^2, \qquad \beta)\ {}^1\begin{bmatrix} A & C \\ D & B \end{bmatrix}^2, \qquad \gamma)\ {}^1\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^2.$$

Solche Quaternare nennen wir *$\alpha\beta\gamma$-Quaternare.* Gelten in einem Quaternar die Eigenschaften β, γ, aber nicht notwendig die weitere Eigenschaft α, so sprechen wir von einem *$\beta\gamma$-Quaternar*; entsprechend sind *$\alpha\gamma$-Quaternare* usw. erklärt.

Gilt in einem Quaternar für jedes eigentliche Punktequadrupel A, B, C, D die Gleichung $\begin{bmatrix} A & B \\ D & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D & C \\ A & B \end{bmatrix}$, so heiße es ein *$\pi$-Quaternar.* Ein allgemeines Kreisquaternar $(\mathfrak{P}; \Theta > \Delta; \sigma)$ nennen wir *Kreisquaternar*, wenn $(\mathfrak{P}; \Theta; \sigma)$ Quaternar ist. Entsprechend bezeichnen wir Kreisquaternare, in denen zusätzlich die Eigenschaften γ, π gelten, als *$\gamma\pi$-Kreisquaternare* usf.

Jedes $\gamma\pi$-Quaternar ist $\alpha\gamma\pi$-Quaternar. Gilt nämlich ${}^1\begin{bmatrix} A & B \\ D & C \end{bmatrix}^2$ für die eigentlichen Quadrupel A_i, B_i, C_i, D_i, $i = 1, 2$, so erfüllen sie wegen der Eigenschaft π auch ${}^1\begin{bmatrix} D & C \\ A & B \end{bmatrix}^2$, was nach γ mit ${}^1\begin{bmatrix} D & C \\ B & A \end{bmatrix}^2$ gleichbedeutend ist. Nochmalige Anwendung von π ergibt die Behauptung. — Entsprechend ist jedes $\alpha\pi$-Quaternar auch $\alpha\gamma\pi$-Quaternar.

Beispiele. 1. Ein einfaches $\alpha\beta\gamma\pi$-Kreisquaternar $(\mathfrak{P}; \Theta > \Delta; \sigma)$ bekommt man durch $\Theta = \{+1, -1\}$, $\Delta = \emptyset$, $\mathfrak{P} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ und $\sigma(ABCD) = \operatorname{sign} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ A & B & C & D \end{pmatrix}$.

2. Ist $\mathfrak{K}_1$ ein kommutativer Körper, $\mathfrak{K}_2$ ein $\mathfrak{K}_1$ echt umfassender (kommutativer oder nicht kommutativer) weiterer Körper mit $\mathfrak{K}_1 \leq$ Zentrum $(\mathfrak{K}_2)$, so hat man in folgender Weise $\beta\gamma$-Kreisquaternare: $\Theta = \mathfrak{K}_2 - \{0, 1\}$, $\Delta = \mathfrak{K}_1 - \{0, 1\}$, $\mathfrak{P} = \mathfrak{K}_2 \cup \{\infty\}$ und $\sigma(ABCD) = (A - C)(B - C)^{-1}(B - D)(A - D)^{-1}$. Tritt dabei ∞ unter den Punkten A, B, C, D auf, so ersetze man in der angegebenen Formel die Differenzen, die formal ∞ enthielten, durch 1. Ist $\mathfrak{K}_2$ kommutativ, so liegen $\alpha\beta\gamma\pi$-Kreisquaternare vor. Ist $\mathfrak{K}_2$ ein nicht kommutativer Körper, so gilt nicht die Eigenschaft α (also auch nicht die Eigenschaft π). Denn ist $a, b \in \mathfrak{K}_2$, $ab \neq ba$, so ist sicherlich $a \neq b$, $ab \neq 0$ und $ab \neq 1$. Dann setze man $A = a^{-1}$ und $B = a^{-1} - b$. Die Punktequadrupel $A, \infty, 0, B$ und $A, A - B, 0, \infty$ sind eigentlich und man hat $\begin{bmatrix} A & \infty \\ B & 0 \end{bmatrix} = A(A - B)^{-1} = \begin{bmatrix} A & A - B \\ \infty & 0 \end{bmatrix}$, hingegen

$$\begin{bmatrix} \infty & A \\ B & 0 \end{bmatrix} = A^{-1}(A - B) = ab \neq ba = (A - B)A^{-1} = \begin{bmatrix} A - B & A \\ \infty & 0 \end{bmatrix}.$$

Wir kommen jetzt zum Doppelverhältniskalkül über einem $\gamma\pi$-(Kreis-)Quaternar, der Zutritt zu weiteren kreisgeometrischen Sätzen und Begriffen gestatten wird.

Ist $(\mathfrak{P}; \Theta; \sigma)$ ein γ-Quaternar, so sollen die Elemente von Θ in folgender Weise multipliziert werden: Sei $p, q \in \Theta$, seien A, B, C verschiedene Punkte und P, Q die Punkte, die nach Q 0 vermittels $\begin{bmatrix} A & B \\ P & C \end{bmatrix} = p$ (es ist also $P \neq A, B, C$), $\begin{bmatrix} A & B \\ Q & P \end{bmatrix} = q$ (es ist also $Q \neq A, B, P$) eindeutig bestimmt sind. Dann werde unter pq (zunächst abhängig von A, B, C) im Falle $Q \neq C$ das Element $t \in \Theta$ mit $t = \begin{bmatrix} A & B \\ Q & C \end{bmatrix}$ verstanden. Im Falle $Q = C$ werde $pq = 1$ gesetzt, wobei 1 ein neues, zu Θ hinzuzunehmendes Element darstellt. — Das Produkt pq ist von den Punkten A, B, C unabhängig: Ist nämlich A', B', C' irgendein weiteres eigentliches Punktetripel, sind P', Q' gemäß $p = \begin{bmatrix} A' & B' \\ P' & C' \end{bmatrix}$, $q = \begin{bmatrix} A' & B' \\ Q' & P' \end{bmatrix}$ bestimmt, so hat man wegen $\begin{bmatrix} A & B \\ P & C \end{bmatrix} = p = \begin{bmatrix} A' & B' \\ P' & C' \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} A & B \\ Q & P \end{bmatrix} = q = \begin{bmatrix} A' & B' \\ Q' & P' \end{bmatrix}$ und Q 1: $\begin{bmatrix} A & B \\ Q & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A' & B' \\ Q' & C' \end{bmatrix}$ im Falle $Q \neq C$, $Q' \neq C'$. Aus $Q \neq C$ folgt aber $Q' \neq C'$ und umgekehrt: $\begin{bmatrix} A & B \\ P & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A' & B' \\ P' & C' \end{bmatrix}$ ergibt $\begin{bmatrix} A & B \\ C & P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A' & B' \\ C' & P' \end{bmatrix}$ mit γ; wäre dann etwa $Q \neq C$ aber $Q' = C'$, so hätte man $\begin{bmatrix} A & B \\ C & P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A' & B' \\ C' & P' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A' & B' \\ Q' & P' \end{bmatrix} = q = \begin{bmatrix} A & B \\ Q & P \end{bmatrix}$, was Q 0 widerspricht. $\mathfrak{G} \equiv \Theta \cup \{1\}$ bildet nun bezüglich der Produktbildung pq eine Gruppe, wenn man noch $1p = p1 = p$ setzt für alle $p \in \mathfrak{G}$: Ist $p \in \Theta$ und $p = \begin{bmatrix} A & B \\ P & C \end{bmatrix}$, so ist q mit $q = \begin{bmatrix} A & B \\ C & P \end{bmatrix}$ das inverse Element von p. Das assoziative Gesetz $(pq)\,r = p(qr)$ ist für $1 \in \{p, q, r\}$ trivial. Sei im anderen Falle $p = \begin{bmatrix} A & B \\ P & C \end{bmatrix}$, $q = \begin{bmatrix} A & B \\ Q & P \end{bmatrix}$, $r = \begin{bmatrix} A & B \\ R & Q \end{bmatrix}$. Dann ist $(pq)\,r = \begin{bmatrix} A & B \\ R & C \end{bmatrix} = p(qr)$ für $R \neq C$ und $(pq)\,r = 1 = p(qr)$ für $R = C$. (Es ist zweckmäßig im Falle, daß A, B, C paarweise verschiedene Punkte sind, $\begin{bmatrix} A & B \\ C & C \end{bmatrix} = 1$ zu setzen. Es gilt dann stets $\begin{bmatrix} A & B \\ Q & P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ R & Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ R & P \end{bmatrix}$, wenn $A, B \neq P, Q, R$ und $A \neq B$ ist.)

$\mathfrak{U} \equiv \Delta \cup \{1\}$ ist eine Untergruppe von $\mathfrak{G}$: Ist nämlich $p \in \mathfrak{U}$, $q \in \mathfrak{U}$, so ist auch $p^{-1} \in \mathfrak{U}$ und $pq \in \mathfrak{U}$: Im Falle $p = 1$ ist dies klar. Sei $p \neq 1$ und $p = \begin{bmatrix} A & B \\ P & C \end{bmatrix}$. Aus KQ 2 folgt dann $p^{-1} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & P \end{bmatrix} \in \Delta$. Ist $q = 1$ oder $pq = 1$, so ist sicherlich $pq \in \mathfrak{U}$. Sei $q \neq 1$ und $q = \begin{bmatrix} A & B \\ Q & P \end{bmatrix}$, $Q \neq C$. Dann folgt aus KQ 1 $pq = \begin{bmatrix} A & B \\ Q & C \end{bmatrix} \in \Delta$, q. e. d.

Satz 2. *Es sei Σ ein $\gamma\pi$-Quaternar. Dann gilt für jedes eigentliche Quadrupel A, B, C, D*

$$\begin{bmatrix} A & B \\ D & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B & A \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D & C \\ A & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C & D \\ B & A \end{bmatrix}.$$

Der Beweis folgt aus $\begin{bmatrix} P & Q \\ S & R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P & Q \\ R & S \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} R & S \\ P & Q \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} R & S \\ Q & P \end{bmatrix}$, wo P, Q, R, S ein beliebiges eigentliches Punktequadrupel ist.

Satz 3. *Ist Σ ein γ-Quaternar, in dem $\begin{bmatrix} A & B \\ D & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B & A \\ C & D \end{bmatrix}$ für jedes eigentliche Punktequadrupel A, B, C, D gilt, so ist $\mathfrak{G}$ abelsch.*

Beweis. Sind p, q Elemente aus $\mathfrak{G}$, so ist $pq = qp$: In den Fällen $p = 1$ bzw. $q = 1$ bzw. $pq = 1$ ist dies klar. Sei also $p \neq 1$, $q \neq 1$, $pq \neq 1$. Sind dann A, B, C verschiedene

Punkte und P, Q die Punkte mit $p = \begin{bmatrix} A & B \\ P & C \end{bmatrix}$, $q = \begin{bmatrix} A & B \\ Q & P \end{bmatrix}$, so hat man $pq = \begin{bmatrix} A & B \\ Q & C \end{bmatrix}$ und weiterhin mit der angenommenen Vertauschungsrelation

$$qp = \begin{bmatrix} A & B \\ Q & P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ P & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B & A \\ P & Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B & A \\ C & P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B & A \\ C & Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ Q & C \end{bmatrix}, \text{ q. e. d.}$$

Gemäß den Sätzen 2, 3 ist also in jedem $\gamma\pi$-Quaternar die zugehörige Gruppe $\mathfrak{G}$ abelsch.

Während in einem γ-Quaternar, in dem π gilt, stets auch

$$\pi^*: \qquad \begin{bmatrix} A & B \\ D & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B & A \\ C & D \end{bmatrix} \text{ für jedes eigentliche Quadrupel } A, B, C, D$$

erfüllt ist, gibt es γ-Quaternare, die der Eigenschaft π^* genügen, nicht aber zusätzlich der Eigenschaft π. Wir geben ein $\alpha\gamma$-Kreisquaternar an, in dem π^*, nicht aber π gilt. (In diesem Beispiel gilt auch nicht β, da allgemein ein-β-Quaternar auch π-Quaternar ist, wenn π^* erfüllt ist.) Es sei $\mathfrak{K}_2$ der Körper der reellen Zahlen, $\mathfrak{K}_1$ ein echter Unterkörper von $\mathfrak{K}_2$. Es sei $f(x) = x$ für $x \geqq 0$ und $f(x) = 2x$ für $x \leqq 0$. Dann sei $\mathfrak{P} = \mathfrak{K}_2 \cup \{\infty\}$, $\Theta = \mathfrak{K}_2 - \{0, 1\}$ $\Delta = \mathfrak{K}_1 - \{0, 1\}$, $\sigma(ABCD) = \dfrac{f(A-C)}{f(B-C)} \cdot \dfrac{f(B-D)}{f(A-D)}$. (Tritt hier ∞ unter dem eigentlichen Quadrupel A, B, C, D auf — etwa $B = \infty$ —, so ersetze man die Ausdrücke $f(P-Q)$ mit $\infty \in \{P, Q\}$ durch 1; also etwa $\sigma(A\,\infty\,CD) = \dfrac{f(A-C)}{f(A-D)}$.)

Daß in diesem Beispiel aus $\begin{bmatrix} A & B \\ D & C \end{bmatrix} \in \Delta$ die weitere Relation $\begin{bmatrix} C & A \\ D & B \end{bmatrix} \in \Delta$ folgt, wenn A, B, C, D ein eigentliches Quadrupel sind, ergibt sich so: Bezeichnet $(ABCD) = \dfrac{A-C}{B-C}\,\dfrac{B-D}{A-D}$ das klassische Doppelverhältnis des eigentlichen Quadrupels A, B, C, D, so ist $\begin{bmatrix} A & B \\ D & C \end{bmatrix} = \varepsilon \cdot (ABCD)$ mit $\varepsilon \neq 0$, $\varepsilon \in \mathfrak{K}_1$. Hat man entsprechend $\begin{bmatrix} A & C \\ D & B \end{bmatrix} = \mu \cdot (ACBD)$, $\mu \neq 0$, so ist $\begin{bmatrix} A & C \\ D & B \end{bmatrix} = \mu(1 - (ABCD)) = \mu\left(1 - \dfrac{1}{\varepsilon}\begin{bmatrix} A & B \\ D & C \end{bmatrix}\right) \in \mathfrak{K}_1$, d. h. $\begin{bmatrix} A & C \\ D & B \end{bmatrix} \in \Delta$, da für eigentliche Quadrupel P, Q, R, S stets $\begin{bmatrix} P & Q \\ S & R \end{bmatrix} \neq 0, 1$ ist. Es gilt nicht π. Das zeigt

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = -\frac{1}{4} \neq -1 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Wir sind jetzt in der Lage, in einem beliebigen $\gamma\pi$-Quaternar die Identität von Peczar ([8], S. 214) nachzuweisen, die ihrerseits in einem $\gamma\pi$-Kreisquaternar den Satz von Miquel impliziert.

Satz 4. *Sind A, B, C, D, E, F, G, H verschiedene Punkte, so gilt*

$$\begin{bmatrix} A & B \\ D & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & F \\ H & G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & E \\ D & H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F & B \\ G & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & F \\ H & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & B \\ D & G \end{bmatrix}.$$

Beweis. Es gilt

$$\begin{bmatrix} H & G \\ F & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & F \\ C & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & F \\ H & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H & G \\ F & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & F \\ H & G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H & G \\ F & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H & G \\ A & F \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} H & G \\ A & E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & E \\ H & G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & E \\ D & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & E \\ H & D \end{bmatrix},$$

woraus

$$\begin{bmatrix} H & G \\ F & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & F \\ H & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & E \\ D & H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & E \\ D & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & F \\ G & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D & G \\ A & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G & C \\ A & F \end{bmatrix}$$

folgt. Hiermit kann man schreiben:

$$\begin{bmatrix} A & E \\ D & H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F & B \\ G & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & F \\ H & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & B \\ D & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & F \\ G & H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G & C \\ F & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D & G \\ E & B \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} H & G \\ F & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & F \\ H & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & E \\ D & H \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} G & C \\ F & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D & G \\ E & B \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} D & G \\ A & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G & C \\ A & F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D & G \\ A & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G & C \\ A & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ D & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ G & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ D & C \end{bmatrix}.$$

Korrolar (Satz von Miquel). *Es seien A, B, C, D, E, F, G, H verschiedene Punkte. Sind dann fünf der Quadrupel $ABCD$, $EFGH$, $AEHD$, $FBCG$, $AFCH$, $EBGD$ konzyklisch, so wegen Satz 4 auch das sechste, da $\mathfrak{U}$ Untergruppe von $\mathfrak{G}$ ist.*

In der Geometrie eines $\gamma\pi$-Kreisquaternars genügen also stets die Kreise dem Satz von Miquel. Dies gilt nicht notwendig für den Berührsatz, ebenfalls nicht notwendig für den Büschelsatz:

Es sei $\mathfrak{K}_1$ der Körper der rationalen, $\mathfrak{K}_2$ der der komplexen Zahlen. Dann betrachten wir das $\beta\gamma\pi$-Kreisquaternar über $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2 > \mathfrak{K}_1$ im bereits definierten Sinne (Beispiel 2). (Diese Kreisgeometrie zitieren wir durch **Geometrie Ψ**.) Hierfür gilt:

a. Durch den Punkt i gehen die verschiedenen Kreise $(\infty, i, 1+i)$, $(\infty, i, \sqrt{2}+i)$, die den Kreis $(\infty\ 0\ 1)$ in ∞ berühren.

b. Es sei $A = 0$, $B = 1$, $C = \sqrt{2}$, $D = \sqrt{3}$, $A' = \infty$, $B' = 2$, $C' = -\sqrt{2}$, $D' = -\frac{2}{3}\sqrt{3}$. Die Kreise $(A'AB')$, $(A'AC')$, $(A'AD')$, $(B'BC')$, $(B'BD')$ sind dann paarweise verschieden. Denn $(A'AB')$ enthält weder C' noch D', $(A'AC')$ enthält weder D' noch B', $(A'AD')$ enthält nicht B', $(B'BC')$ enthält nicht D'. Weiterhin gilt $\begin{bmatrix} A' & A \\ B & B' \end{bmatrix} = \frac{1}{2}$, $\begin{bmatrix} A' & A \\ C & C' \end{bmatrix} = -1$, $\begin{bmatrix} A' & A \\ D & D' \end{bmatrix} = -\frac{3}{2}$, $\begin{bmatrix} B' & B \\ C & C' \end{bmatrix} = -1$, $\begin{bmatrix} B' & B \\ D & D' \end{bmatrix} = -4$, hingegen

$$\begin{bmatrix} C' & C \\ D & D' \end{bmatrix} = -49 + 20\sqrt{6} \in \mathfrak{K}_2 - \mathfrak{K}_1,$$

was dem Büschelsatz widerspricht.

§ 2. Büschelecken[12]).

Wir legen für das Folgende ein $\beta\gamma\pi$-Kreisquaternar zugrunde[13]).

Unter einer Büschelecke sei ein geordnetes Kreispaar zweier sich mindestens in zwei verschiedenen Punkten schneidender Kreise a, b und ein Schnittpunkt S dieser Kreise verstanden. Eine Büschelecke, die wir auch in der Form $(ab; S)$ anschreiben, heiße entartet, wenn $a = b$ ist, sonst nichtentartet. Nichtentartete Büschelecken $(ab; S)$ werden gelegentlich durch $(ab; SS')$ angegeben, wobei $\{S, S'\} = a \cap b$.

Ein weiterer Begriff ist der der *Gleichheit von Büschelecken*:

Definition[14]). *Es seien $(ab; SS')$, $(cd; TT')$ nichtentartete Büschelecken. Genau dann heiße $(ab; S) = (cd; T)$ wenn es Punkte $A \in a - b$, $B \in b - a$, $C \in c - d$, $D \in d - c$ gibt mit $\begin{bmatrix} S' & S \\ B & A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T' & T \\ D & C \end{bmatrix}$. — Zwei entartete Büschelecken sollen stets einander gleich sein.*

Um zu zeigen, daß die definierte Gleichheit eine Äquivalenzrelation ist, benötigen wir:

Satz 5. *Es seien $(ab; SS')$, $(cd; TT')$ nichtentartete Büschelecken, ferner $A, A' \in a - b$; $B, B' \in b - a$; $C, C' \in c - d$ sonst beliebige Punkte. Gilt dann $X \in d - c$ mit*

$$\begin{bmatrix} S' & S \\ B & A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T' & T \\ X & C \end{bmatrix}, \tag{1}$$

---

[12]) Im klassischen Falle handelt es sich um die Geometrie der orientierten Kreiswinkel.

[13]) Die Grundkonzeptionen und -sätze der Paragraphen 2 und 3 sind bereits unter echt allgemeineren Bedingungen (nämlich in γ-Kreisquaternaren, in denen $\mathfrak{U}$ Normalteiler von $\mathfrak{G}$ ist; vgl. Beispiele 2, in denen $\mathfrak{K}_1$ eigentlicher Schiefkörper ist) definierbar und ableitbar: Begriff der Büschelecke; Gleichheit von Büschelecken. Satz 5 (bedeutet die Transitivität der Gleichheit von Büschelecken): hier muß

$$\begin{bmatrix} T' & T \\ X' & X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S' & S \\ B & A \end{bmatrix}^{-1} \left(\begin{bmatrix} T' & T \\ C' & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S' & S \\ A & A' \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} S' & S \\ B & A \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} S' & S \\ B' & B \end{bmatrix}$$

statt (3) geschrieben werden; Satz 6; Satz 7; Begriff der freien Büschelecke; Gruppe der freien Büschelecken (ist ebenfalls $\mathfrak{G}/\mathfrak{U}$); Orthogonalecke.

Satz 10 ist unter der zusätzlichen Annahme von β, Satz 11 unter der zusätzlichen Annahme von α und β bewiesen.

[14]) Gehört der Punkt P dem Kreis a, nicht aber dem Kreis b an, so schreiben wir $P \in a - b$.

so gilt auch $X' \in d - c$, *wenn auch*

$$\begin{bmatrix} S' & S \\ B' & A' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T' & T \\ X' & C' \end{bmatrix} \tag{2}$$

ist.

Beweis. Es ist

$$\begin{bmatrix} S' & S \\ B' & A' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S' & S \\ A & A' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S' & S \\ B & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S' & S \\ B' & B \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} T' & T \\ X' & C' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T' & T \\ C & C' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T' & T \\ X & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T' & T \\ X' & X \end{bmatrix},$$

d. h. mit (1), (2) gilt

$$\begin{bmatrix} T' & T \\ X' & X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S' & S \\ A & A' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S' & S \\ B' & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T' & T \\ C' & C \end{bmatrix}. \tag{3}$$

Da die Terme der rechten Seite von (3) eng sind, gilt $X' \in (T'TX) = d$. Läge nun X' auf c, so folgte $X' \in c \cap d = \{T', T\}$. Die Gleichung (2) hat aber nach Q 0 eine Lösung $X' \neq T', T, C'$.

Daß die Gleichheitsbeziehung zwischen Büschelecken eine Äquivalenzrelation darstellt, braucht nur für nichtentartete Büschelecken bewiesen zu werden. Ist $(ab;\, SS')$ eine solche und $A \in a - b$, $B \in b - a$, so beweist $\begin{bmatrix} S' & S \\ B & A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S' & S \\ B & A \end{bmatrix}$ das reflexive Gesetz. Gilt $(a_1a_2;\, UU') = (b_1b_2;\, VV')$, d. h. $\begin{bmatrix} U' & U \\ A_2 & A_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V' & V \\ B_2 & B_1 \end{bmatrix}$ für geeignete Punkte A_i, B_i, $i = 1, 2$, so hat man wegen $\begin{bmatrix} V' & V \\ B_2 & B_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U' & U \\ A_2 & A_1 \end{bmatrix}$ auch $(b_1b_2;\, VV') = (a_1a_2;\, UU')$. Das transitive Gesetz läßt sich über Satz 5 beweisen: Gilt $(a_1a_2;\, UU') = (b_1b_2;\, VV')$, $(b_1b_2;\, VV') = (c_1c_2;\, WW')$, so lassen sich Punkte $A_1 \in a_1 - a_2$, $A_2 \in a_2 - a_1$, $B_1 \in b_1 - b_2$, $B_2 \in b_2 - b_1$, $C_1 \in c_1 - c_2$, $C_2 \in c_2 - c_1$ finden mit $\begin{bmatrix} U' & U \\ A_2 & A_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V' & V \\ B_2 & B_1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} V' & V \\ B_2 & B_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W' & W \\ C_2 & C_1 \end{bmatrix}$. Dann folgt die Behauptung aus $\begin{bmatrix} U' & U \\ A_2 & A_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W' & W \\ C_2 & C_1 \end{bmatrix}$.

Für Büschelecken gelten folgende Sätze[15]):

Satz 6. *Aus* $(ab;\, S) = (cd;\, T)$ *folgt* $(ba;\, S) = (dc;\, T)$.

Beweis. Im Falle $a = b$ ist $c = d$ und damit nichts mehr zu beweisen. Sei $a \neq b$, $\{S', S\} = a \cap b$, $\{T', T\} = c \cap d$, seien $A \in a - b$, $B \in b - a$, $C \in c - d$, $D \in d - c$ Punkte mit $\begin{bmatrix} S' & S \\ B & A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T' & T \\ D & C \end{bmatrix}$. Dann folgt die Behauptung aus $\begin{bmatrix} S' & S \\ A & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T' & T \\ C & D \end{bmatrix}$.

Satz 7. *Ist* $(ab;\, S) = (ac;\, S)$, $a \cap b = a \cap c$, *so folgt* $b = c$.

Beweis. Im Falle $a = b$ ist nichts mehr zu beweisen. Im Falle $(ab;\, SS') = (ac;\, SS')$ gilt also $\begin{bmatrix} S' & S \\ B & A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S' & S \\ C & A'' \end{bmatrix}$ für gewisse Punkte $A \in a - b$, $B \in b - a$, $A'' \in a - c$, $C \in c - a$. Mit Hilfe von Satz 5 folgt dann aus $\begin{bmatrix} S' & S \\ B & A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S' & S \\ X & A \end{bmatrix}$, $X \in c - a$. Es ist aber $B = X$ und damit $c = (S'SX) = (S'SB) = b$.

Satz 8. *Liegen die Punkte* A, B, C, D *nicht gemeinsam auf einem Kreise, so gilt*

$$((ABC)\,(ABD);\, B) = ((DCB)\,(DCA);\, C)^{16}).$$

[15]) Die axiomatische Bedeutung der Sätze 6, 8 und eines stärker formulierten Satzes 7 hat Smid [13], § 25 unter der Annahme des Berührsatzes, angegeben.

[16]) Im klassischen Falle ist dies der Satz über den Sehnentangentenwinkel.

Beweis. Die Punkte A, B, C, D sind sicherlich paarweise verschieden. Dann folgt alles aus $\begin{bmatrix} A & B \\ D & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D & C \\ A & B \end{bmatrix}$.

Satz 9. *Aus* $(ab;\, SS') = (cd;\, TT')$ *folgt* $(ab;\, S'S) = (dc;\, T'T)$.

Der Beweis ergibt sich aus $\begin{bmatrix} S & S' \\ A & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S' & S \\ B & A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T' & T \\ D & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T & T' \\ C & D \end{bmatrix}$ für passende Punkte A, B, C, D.

Unter einer *freien Büschelecke* verstehen wir eine Äquivalenzklasse gleicher Büschelecken. Wir bezeichnen freie Büschelecken mit $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \ldots$, die entartete freie Büschelecke mit 0. Gehört $(ab;\, S)$ zur Klasse $\mathfrak{a}$, so schreiben wir auch $(ab;\, S) \in \mathfrak{a}$ oder $\mathfrak{a} \ni (ab;\, S)$.

Geben wir einen Kreis a, einen Punkt $S \in a$ und eine freie Büschelecke $\mathfrak{a}$ vor, so kann man nach Kreisen x mit $(ax;\, S) \in \mathfrak{a}$ fragen. Im Falle $\mathfrak{a} = 0$ ist $x = a$ die einzige Lösung. Bei $\mathfrak{a} \neq 0$ ist x eindeutig bestimmt, wenn man einen weiteren Punkt $S' \in a$, $S' \neq S$, vorgibt, der auf x liegen soll: Aus $(ax_1;\, SS') \in \mathfrak{a}$, $(ax_2;\, SS') \in \mathfrak{a}$ und $a \cap x_1 = \{S, S'\} = a \cap x_2$ folgt $x_1 = x_2$ nach Satz 7. — Daß überhaupt eine Lösung existiert, kommt so: Ist $(mn;\, TT')$ ein Element von $\mathfrak{a}$, ist $M \in m - n$, $N \in n - m$, so bestimme man X aus $\begin{bmatrix} S' & S \\ X & A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T' & T \\ N & M \end{bmatrix}$, wo $A \in a - \{S, S'\}$ ist. Es ist dann $x = (S'SX)$ eine Lösung.

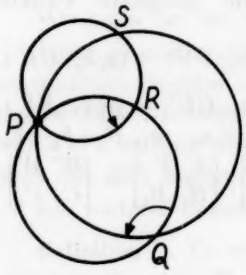

Fig. 1.

Die beiden folgenden Sätze kennzeichnen die Gleichung $\begin{bmatrix} P & Q \\ S & R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P' & Q' \\ S' & R' \end{bmatrix}$ durch Beziehungen zwischen Büschelecken.

Satz 10. *Sind P, Q, R, S Punkte, die nicht gemeinsam auf einem Kreise liegen, sind P', Q', R', S' weitere Punkte, so ist genau dann* $\begin{bmatrix} P & Q \\ S & R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P' & Q' \\ S' & R' \end{bmatrix}$, *wenn*

(a) *P', Q', R', S' nicht gemeinsam auf einem Kreise liegen*

(b) $((PQR)\,(PQS);\, Q) = ((P'Q'R')\,(P'Q'S');\, Q')$,
$((PRQ)\,(PRS);\, R) = ((P'R'Q')\,(P'R'S');\, R')$.

Beweis. Aus $\begin{bmatrix} P & Q \\ S & R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P' & Q' \\ S' & R' \end{bmatrix}$ folgen unmittelbar die Eigenschaften (a), (b). Umgekehrt gelte nun (a), (b). Dann hat man zunächst

$$\begin{bmatrix} P & Q \\ S & R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P' & Q' \\ X' & R' \end{bmatrix}, \quad X' \in (P'Q'S') - (P'Q'R'),$$

$$\begin{bmatrix} P & R \\ S & Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P' & R' \\ Y' & Q' \end{bmatrix}, \quad Y' \in (P'R'S') - (P'R'Q').$$

Mit β folgt hieraus $\begin{bmatrix} P' & Q' \\ Y' & R' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P & Q \\ S & R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P' & Q' \\ X' & R' \end{bmatrix}$, was $X' = Y'$ bedeutet. Es ist also $X' = Y'$ ein Schnittpunkt von $(P'Q'S')$, $(P'R'S')$, der nicht auf $(P'Q'R')$ liegt. Daraus folgt $X' = S'$, q. e. d.

Satz 11. *Sind A, P_1, P_2, P_3 verschiedene Punkte auf einem Kreis k, sind A', P'_1, P'_2, P'_3 weitere Punkte, so ist genau dann* $\begin{bmatrix} A & P_1 \\ P_3 & P_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A' & P'_1 \\ P'_3 & P'_2 \end{bmatrix}$, *wenn*

(a) *A', P_1', P_2', P_3' verschiedene Punkte auf einem Kreis k' sind*

und

(b) *die Kreise x_i, $i = 1, 2, 3$, gemeinsam zwei verschiedene Punkte enthalten. Dabei seien die x_i bestimmt durch*

$$(k(ABP_i); AP_i) = (k' x_i;\ A' P_i'),\ i = 1, 2, 3,$$

$B \in k$ ein sonst beliebiger fester Punkt.

Beweis. Aus $\begin{bmatrix} A & P_1 \\ P_3 & P_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A' & P_1' \\ P_3' & P_2' \end{bmatrix}$ folgt sofort (a).

Um (b) zu beweisen, sei also $B \in k$ ein sonst beliebiger Punkt und x_i, $i = 1, 2, 3$, durch

(1) $(k(ABP_i); AP_i) = (k' x_i; A' P_i'),\ i = 1, 2, 3$

bestimmt. Die Kreise x_1, x_2, x_3 sind also paarweise verschieden. Für $i = 1, 2$ ergibt (1)

(2) $\begin{bmatrix} P_1 & A \\ B & P_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1' & A' \\ X & P_2' \end{bmatrix},\ X \in x_1 - k',$

(3) $\begin{bmatrix} P_2 & A \\ B & P_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_2' & A' \\ Y & P_1' \end{bmatrix},\ Y \in x_2 - k'.$

(2), (3) führen auf $X = Y \in (x_1 \cap x_2) - k'$.

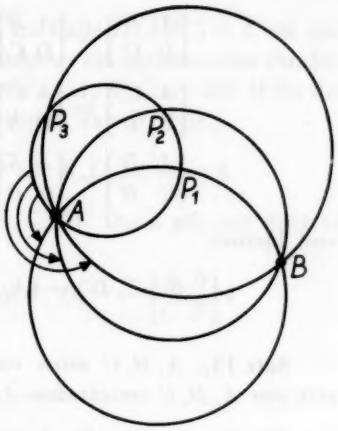

Fig. 2.

Wenn man nun beachtet, daß aus (2) und $\begin{bmatrix} P_1 & A \\ P_2 & P_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1' & A' \\ P_2' & P_3' \end{bmatrix}$ nach Q 1 die Gleichung

$$\begin{bmatrix} P_1 & A \\ B & P_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1' & A' \\ X & P_3' \end{bmatrix},\ \text{d. h.}\ \begin{bmatrix} P_3 & A \\ B & P_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_3' & A' \\ X & P_1' \end{bmatrix}$$

folgt, kommt man unter Beachtung von (1) (für $i = 3$) auf $X \in x_3$.

Umgekehrt gelte (a), (b). Aus (1) folgt wiederum (2). Die Gleichung (2) kann in $\begin{bmatrix} P_2 & A \\ B & P_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_2' & A' \\ X & P_1' \end{bmatrix}$ umgeschrieben werden, was mit (1) zunächst $X \in x_2 - k'$ und mit (2) weiterhin $X \in (x_1 \cap x_2) - k'$ bedeutet. Damit ist $X \in x_3$ nach (b). Aus (1) für $i = 3$ folgt $\begin{bmatrix} P_3 & A \\ B & P_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_3' & A' \\ \hat{X} & P_1' \end{bmatrix},\ \hat{X} \in x_3 - k'$. Letzteres ergibt

(4) $$\begin{bmatrix} P_1 & A \\ B & P_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1' & A' \\ \hat{X} & P_3' \end{bmatrix},$$

was mit (1) erst $\hat{X} \in x_1 - k'$ und daher $\hat{X} \in (x_1 \cap x_3) - k'$ zur Folge hat. Damit ist nach (b) auch $\hat{X} \in x_2$. Das führt auf $\hat{X} = X$, was mit (2), (4) und Q 1 zusammen $\begin{bmatrix} P_1 & A \\ P_2 & P_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1' & A' \\ P_2' & P_3' \end{bmatrix}$ bedeutet.

Zum weiteren geometrischen Aufbau stellen wir einige Hilfsmittel bereit, die sich zunächst auf $\beta\gamma\pi$-Quaternare, dann auf $\beta\gamma\pi$-Kreisquaternare beziehen. Insbesondere wird sich dabei der Begriff des harmonischen Punktequadrupels ergeben.

Es sei A, B, C, D ein eigentliches Punktequadrupel. Dann bezeichne (A, B, C, D) das Produkt $\begin{bmatrix} A & B \\ D & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & C \\ B & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & D \\ C & B \end{bmatrix}$. Man hat die Rechenregel

$$(A, B, C, D) = (A, B, D, C)^{-1}.$$

Satz 12. *Sind A, B, C, D verschiedene Punkte, ebenso A', B', C', D', so gilt*

$$(A, B, C, D) = (A', B', C', D').$$

Beweis. Man bestimme X aus $\begin{bmatrix} A' & B' \\ D' & C' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ X & C \end{bmatrix}$. Da A', B', C', D' verschiedene Punkte sind, ist $X \neq A, B, C$. Im Falle $X = D$ ergibt sich die Behauptung unmittelbar mit β, γ. Sei also $X \neq D$. Es gilt

$$\begin{bmatrix} A' & B' \\ D' & C' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ D & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ X & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ D & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X & D \\ A & B \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} A' & C' \\ B' & D' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & C \\ B & X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & C \\ B & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & C \\ D & X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & C \\ B & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X & D \\ C & A \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} A' & D' \\ C' & B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & X \\ C & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C & B \\ A & X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C & B \\ A & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C & B \\ D & X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & D \\ C & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X & D \\ B & C \end{bmatrix}$$

und hiermit

$$(A', B', C', D') = (A, B, C, D) \cdot \begin{bmatrix} X & D \\ A & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X & D \\ C & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X & D \\ B & C \end{bmatrix} = (A, B, C, D).$$

Satz 13_1. *A, B, C seien verschiedene Punkte. Dann hat $\begin{bmatrix} A & B \\ X & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & X \end{bmatrix}$ höchstens eine von A, B, C verschiedene Lösung X.*

Beweis. Gesetzt, X_1, X_2 mit $X_1 \neq X_2$ wären Lösungen, die von A, B, C verschieden sind. Mit β, γ folgt dann $\begin{bmatrix} A & X_i \\ C & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & C \\ X_i & B \end{bmatrix}$, $i = 1, 2$, und hiermit

$$(A, B, C, X_i) = \begin{bmatrix} A & B \\ X_i & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & C \\ B & X_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & C \\ X_i & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ X_i & C \end{bmatrix}.$$

Nach Satz 12 gilt also $\begin{bmatrix} A & B \\ X_1 & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ X_2 & C \end{bmatrix}$, was $X_1 = X_2$ bedeutet. Widerspruch.

Unter $H(ABC)$ soll die Lösung $X \neq A, B, C$ von $\begin{bmatrix} A & B \\ X & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & X \end{bmatrix}$ verstanden werden, sofern eine solche existiert. Existiert keine Lösung $X \neq A, B, C$, so sei $H(ABC) = C$.

Gibt es drei verschiedene Punkte A, B, C mit $H(ABC) \neq A, B, C$, so ist stets $H(UVW) \neq U, V, W$ für verschiedene Punkte U, V, W und außerdem

$$\begin{bmatrix} A & B \\ H(ABC) & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U & V \\ H(UVW) & W \end{bmatrix}.$$

Man bestimme nämlich X aus $\begin{bmatrix} A & B \\ H(ABC) & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U & V \\ X & W \end{bmatrix}$. Sicherlich ist $X \neq U, V, W$. Nun ist

$$\begin{bmatrix} U & V \\ W & X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & H(ABC) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ H(ABC) & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U & V \\ X & W \end{bmatrix}$$

und hiermit $X = H(UVW)$ nach Satz 13_1.

Aus der letzten Bemerkung ergibt sich sofort die weitere: Gibt es drei verschiedene Punkte A, B, C mit $H(ABC) = C$, so ist stets $H(UVW) = W$ für verschiedene Punkte U, V, W.

Die Fälle $H(ABC) \neq C$, $H(ABC) = C$ zusammengefaßt, hat man

Satz 13_2. *Sind A, B, C verschiedene Punkte, ebenso U, V, W, so gilt*

$$\begin{bmatrix} A & B \\ H(ABC) & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U & V \\ H(UVW) & W \end{bmatrix}.$$

Satz 13_2 ermöglicht die Bezeichnung $\begin{bmatrix} A & B \\ H(ABC) & C \end{bmatrix} = -1$, wobei -1 ein von den Punkten A, B, C unabhängiges festes Element aus $\mathfrak{G}$ ist. Im Falle $H(ABC) = C$ ist also $-1 = 1$. — $A, B, C, H(ABC)$ heißen — in dieser Reihenfolge — ein *harmonisches Punktequadrupel*. $H(ABC)$ heißt auch der *vierte harmonische Punkt zu A, B, C*. — Mit Hilfe der Sätze 10, 11 findet man leicht eine geometrische Konstruktion von $H(ABC)$.

Satz 14. *Sind A, B, C, D verschiedene Punkte, so gilt $(A, B, C, D) = -1$.*

Beweis. 1. Fall: $-1 = 1$. Wir setzen $\begin{bmatrix} A & B \\ X & C \end{bmatrix} = (A, B, C, D)$. Dann gilt mit Satz 12

$$\begin{bmatrix} A & B \\ X & C \end{bmatrix} = (A, B, C, D) = (A, B, D, C) = (A, B, C, D)^{-1} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & X \end{bmatrix}.$$

Es ist also $X = C$.

2. Fall: $-1 \neq 1$. Nach Satz 12 gilt

$$(A, B, C, D) = (A, B, C, H(ABC)) = \begin{bmatrix} A & B \\ H(ABC) & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & H(ABC) \\ B & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & H(ABC) \\ C & B \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A & B \\ H(ABC) & C \end{bmatrix} = -1, \text{ q. e. d.}$$

Bis auf einen zu nennenden Spezialfall sind die Punkte $A, B, C, H(ABC)$ stets konzyklisch, d. h. es ist dann $-1 \in \mathfrak{U}$:

Satz 15. *Gibt es einen Kreis, der mehr als drei Punkte enthält, so gilt $-1 \in \mathfrak{U}$. Besitzt jeder Kreis genau drei Punkte, so ist dann und nur dann $-1 \in \mathfrak{U}$, wenn $-1 = 1$ ist. Es gibt $\beta\gamma\pi$-Kreisquaternare, in denen $-1 \in \mathfrak{U}$ ist.*

Beweis. 1. Es seien A, B, C, D verschiedene Punkte auf einem Kreis. Man hat also $\begin{bmatrix} A & B \\ D & C \end{bmatrix} \in \mathfrak{U}$ und nach KQ 2 und Satz 14

$$-1 = \begin{bmatrix} A & B \\ D & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & C \\ B & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & D \\ C & B \end{bmatrix} \in \mathfrak{U},$$

da $\mathfrak{U}$ Gruppe ist.

2. Im Falle, daß jeder Kreis genau drei Punkte enthält, ist $\mathfrak{U} = \{1\}$. Hieraus folgt die zweite Behauptung.

3. Es sei $\mathfrak{R}$ der reelle Zahlkörper, $\mathfrak{P} = \mathfrak{R} \cup \{\infty\}$, $\Theta = \mathfrak{R} - \{0, 1\}$, $\Delta = \emptyset$ und $\sigma(ABCD) = \dfrac{A - C}{B - C} : \dfrac{A - D}{B - D}$ für das eigentliche Quadrupel A, B, C, D. Hier ist offenbar $-1 \notin \mathfrak{U}$.

Wir nennen $\beta\gamma\pi$-Kreisquaternare, in denen $-1 \notin \mathfrak{U}$ ist (in denen also $A, B, C, H(ABC)$ nicht konzyklisch liegen), *ausgeartet*. Später (§ 5) werden alle ausgearteten $\beta\gamma\pi$-Kreisquaternare angegeben.

§ 3. Die Gruppe der freien Büschelecken.

Ist $(ab; SS')$ eine nichtentartete Büschelecke, so bilden alle Doppelverhältnisse $\begin{bmatrix} S' & S \\ B & A \end{bmatrix}$, $A \in a - b$, $B \in b - a$ genau eine Restklasse der Faktorgruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{U}$:

$$\left\{\begin{bmatrix} S' & S \\ B & A \end{bmatrix}\right\}_{A \in a-b,\ B \in b-a} = \begin{bmatrix} S' & S \\ B_0 & A_0 \end{bmatrix} \mathfrak{U},$$

A_0, B_0 irgendwelche Punkte mit $A_0 \in a - b$, $B_0 \in b - a$.

Gleichen Büschelecken entsprechen gleiche Restklassen, ungleichen Büschelecken ungleiche Restklassen: Sind nämlich $(ab; SS')$, $(cd; TT')$ nichtentartete Büschelecken mit $(ab; SS') = (cd; TT')$, so gilt $\begin{bmatrix} S' & S \\ B & A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T' & T \\ D & C \end{bmatrix}$ für gewisse Punkte $A \in a - b$, $B \in b - a$, $C \in c - d$, $D \in d - c$, was $\begin{bmatrix} S' & S \\ B & A \end{bmatrix} \mathfrak{U} = \begin{bmatrix} T' & T \\ D & C \end{bmatrix} \mathfrak{U}$ bedeutet. Wäre andererseits $(ab; SS') \neq (cd; TT')$, jedoch $\begin{bmatrix} S' & S \\ B & A \end{bmatrix} \mathfrak{U} = \begin{bmatrix} T' & T \\ D & C \end{bmatrix} \mathfrak{U}$, $A \in a - b$, $B \in b - a$, $C \in c - d$, $D \in d - c$, so besagte die letztere Gleichung auch $\begin{bmatrix} S' & S \\ B' & A' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T' & T \\ D & C \end{bmatrix}$, $C \in c - d$, $D \in d - c$, $A' \in a - b$, $B' \in b - a$ für passende Punkte A', B', was nicht geht.

Man hat also eine eineindeutige Abbildung der freien Büschelecken auf die Restklassen von $\mathfrak{G}/\mathfrak{U}$, wenn man noch $\mathfrak{U}$ der entarteten freien Büschelecke entsprechen läßt: Jede Restklasse $\begin{bmatrix} S' & S \\ B & A \end{bmatrix} \mathfrak{U}$, $\begin{bmatrix} S' & S \\ B & A \end{bmatrix} \in \mathfrak{G} - \mathfrak{U}$, kommt nämlich auch als Bild vor, etwa als Bild der freien Büschelecke $\mathfrak{a}$ mit $\mathfrak{a} \ni ((S'SA)(S'SB); SS')$.

Definition (*Addition von freien Büschelecken*). *Wird die freie Büschelecke* $\mathfrak{a}$ *durch die Restklasse* $p\mathfrak{U}$ *repräsentiert, die freie Büschelecke* $\mathfrak{b}$ *durch* $q\mathfrak{U}$, *so sei unter* $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ *die freie Büschelecke verstanden, die durch* $pq\mathfrak{U}$ *repräsentiert wird.*

Aus der Tatsache, daß $\mathfrak{G}/\mathfrak{U}$ eine abelsche Gruppe ist, folgt

Satz 16. *Die Addition von freien Büschelecken ist kommutativ und assoziativ. Es existiert eine Nullbüschelecke* 0 *mit* $0 + \mathfrak{a} = \mathfrak{a}$ *für alle* $\mathfrak{a}$ *und zu jeder freien Büschelecke* $\mathfrak{a}$ *eine weitere* $-\mathfrak{a}$ *mit* $\mathfrak{a} + (-\mathfrak{a}) = 0$.

Man kann sich in folgender Weise die Addition $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{c}$, $\mathfrak{a} \neq 0$, $\mathfrak{b} \neq 0$, veranschaulichen: Es sei k ein beliebiger Kreis und $S, S' \in k$, $S \neq S'$. Dann bestimme man a aus $(ka; SS') \in \mathfrak{a}$ und b aus $(ab; SS') \in \mathfrak{b}$. Man hat dann

$$(ka; SS') + (ab; SS') = (kb; SS') \in \mathfrak{c};$$

dies folgt aus $\begin{bmatrix} S' & S \\ A & K \end{bmatrix} \mathfrak{U} \cdot \begin{bmatrix} S' & S \\ B & A \end{bmatrix} \mathfrak{U} = \begin{bmatrix} S' & S \\ B & K \end{bmatrix} \mathfrak{U}$ für Punkte $A \in a - k$, $K \in k - a$, $B \in b - a$.

Satz 17. *Vorgelegt sei ein nichtausgeartetes* $\beta\gamma\pi$*-Kreisquaternar. Sind dann* A, B, C, W *nicht gemeinsam auf einem Kreis liegende Punkte, so gilt*[17])

$$((ABW)(CAW); AW) + ((BCW)(ABW); BW) + ((CAW)(BCW); CW) = 0.$$

[17]) Im klassischen Falle liegt der Satz über die Winkelsumme im Kreisdreieck vor.

Der Beweis folgt aus $\begin{bmatrix} W & A \\ C & B \end{bmatrix} \mathfrak{U} \cdot \begin{bmatrix} W & B \\ A & C \end{bmatrix} \mathfrak{U} \cdot \begin{bmatrix} W & C \\ B & A \end{bmatrix} \mathfrak{U} = -1\,\mathfrak{U} = \mathfrak{U}$ nach den Sätzen 14, 15 unter Zugrundelegung eines nichtausgearteten $\beta\gamma\pi$-Kreisquaternars.

Korrolar. *Sind A, B, C, W nicht gemeinsam auf einem Kreis liegende Punkte, so gilt*

$$((ABW)\,(CAW);\,AW) + ((BCW)\,(ABW);\,BW) = ((BCW)\,(CAW);\,CW).$$

Definition. *Unter dem Argument von t, wobei $t \in \mathfrak{G}$, verstehen wir die freie Büschelecke $t\mathfrak{U}$; in Zeichen:* $\arg t = t\mathfrak{U}$.

Die von Möbius herrührende (in Blaschke [1] dargestellte) klassische Deutung des Argumentes eines Doppelverhältnisses läßt sich auch hier vornehmen:

Satz 18. *Es seien A, B, C, D, W verschiedene Punkte. Dann gilt*

$$\arg \begin{bmatrix} A & B \\ D & C \end{bmatrix} = ((WCB)\,(WCA);\,C) + ((WDA)\,(WDB);\,D).$$

Der Beweis folgt aus $\begin{bmatrix} A & B \\ D & C \end{bmatrix} \mathfrak{U} = \begin{bmatrix} W & C \\ A & B \end{bmatrix} \mathfrak{U} \cdot \begin{bmatrix} W & D \\ B & A \end{bmatrix} \mathfrak{U}$.

In gleichem Zusammenhang wie Satz 18 gilt

Satz 18′. *Vier verschiedene Punkte A, B, C, D liegen dann und nur dann gemeinsam auf einem Kreis k, wenn*

$$((WCB)\,(WCA);\,C) + ((WDA)\,(WDB);\,D) = 0$$

ist, wo W ein beliebiger Punkt $\in k$ ist[18]).

Der Beweis folgt aus $\begin{bmatrix} A & B \\ D & C \end{bmatrix} \mathfrak{U} = \begin{bmatrix} W & C \\ A & B \end{bmatrix} \mathfrak{U} \cdot \begin{bmatrix} W & D \\ B & A \end{bmatrix} \mathfrak{U}$.

Zur völligen Festlegung von $t \in \mathfrak{G}$ kann man neben $\arg t$ noch einen *Betrag* von t einführen:

Definition. *Sei $\Omega = \{\omega, \ldots\}$ eine Menge, die von jeder Restklasse aus $\mathfrak{G}/\mathfrak{U}$ genau ein Element enthält, sonst aber keine Elemente aufweist. Ist dann t vom Argument $\omega\mathfrak{U}$, ω der zugehörige Ω-Repräsentant, so heiße $t\omega^{-1}$ der Betrag (relativ Ω) von t, in Zeichen $|t| = t\omega^{-1}$.*

Unter (ω, ω') wollen wir dasjenige Element ω'' aus Ω verstehen, das auch in $\omega\omega'\mathfrak{U}$ liegt. Dann gilt

Satz 19. *Es ist für beliebige Elemente $t, t' \in \mathfrak{G}$ stets*

$$|tt'| = tt'(t\,|t|^{-1},\ t'\,|t'|^{-1})^{-1} \quad \textit{und} \quad \arg(tt') = \arg t + \arg t'.$$

Ist stets $(\omega, \omega') = \omega\omega'$, so hat man $|tt'| = |t|\,|t'|$ für beliebige Elemente $t, t' \in \mathfrak{G}$.

Bemerkung. Man beachte, daß das hier definierte Argument im klassischen Fall mod π gemessen wird. Besitzt speziell $\mathfrak{U}$ einen Positivitätsbereich $\mathfrak{U}^+$, der Untergruppe von $\mathfrak{U}$ vom Index 2 ist, so kann man $\arg t = t\mathfrak{U}^+$ setzen und Ω über $\mathfrak{G}/\mathfrak{U}^+$ statt über $\mathfrak{G}/\mathfrak{U}$ konstruieren. Ist dann im klassischen Falle $\mathfrak{U}^+$ gleich der Menge der positiven Zahlen und Ω gleich der Menge der unimodularen homplexen Zahlen, so hat man die dort vorliegenden Verhältnisse.

---

[18]) Schreibt man $((WCB)\,(WCA);\,C) = ((WDB)\,(WDA);\,D)$, so liegt im klassischen Falle der Peripheriewinkelsatz vor.

Unser Winkelbegriff ist *unabhängig* vom Berührsatz entwickelt worden. Dabei ist nochmals hervorzuheben, daß trotz der Gültigkeit des Miquelschen Satzes der Berührsatz nicht notwendig in einem $\beta\gamma\pi$-Kreisquaternar erfüllt ist (vgl. Geometrie Ψ). Der nun folgende Satz stellt die Verbindung zu dem auf andere Weise begründeten Smidschen Winkelbegriff [13], § 25, her.

Satz 20. *Vorgelegt sei ein nichtausgeartetes $\beta\gamma\pi$-Kreisquaternar, dessen Kreise dem Berührsatz genügen. Sind dann a, b zwei sich in genau zwei verschiedenen Punkten S, S' schneidende Kreise und ist c ein weiterer Kreis, der mit b nur den Punkt S gemein hat, so gilt* $(ab; S) = (ac; S)$.

Beweis. c hat mit a einen weiteren Schnittpunkt $T \neq S$ gemein. Wäre dies nicht der Fall, so berührten sich c und a ebenfalls in S, woraus $a \cap b = \{S\}$ folgte; Widerspruch. Nach Konstruktion von c ist T von S' verschieden. Damit hat

$$(1) \qquad \begin{bmatrix} T & S \\ X & S' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S' & S \\ B & T \end{bmatrix},$$

wo $B \in b - a$ ein fester Punkt sei, eine Lösung $X \neq T, S, S'$. Aus (1) folgt

$$(2) \qquad (ab; S) = \big(a(STX); S\big)$$

und

$$(2') \qquad (STX) \neq a.$$

Wenn man gezeigt hat, daß (STX) den Kreis b in S berührt, so folgt aus dem Berührsatz $c = (STX)$ und aus (2) die Behauptung. — Hätten nun (STX), b einen weiteren Schnittpunkt $M \neq S$ gemein, so folgte zunächst $M \neq T, S'$ (d. h. insbesondere $M \notin a$, da sonst $M \in a \cap b$ wäre). Denn T liegt nicht auf b; im Falle $S' = M$ wäre $S' = M \in (STX)$, d. h. $(STX) = a$, was (2′) widerspricht. Aus (2) und Satz 6 folgt $(ba; S) = \big((STX)\, a; S\big)$, d. h. mit Satz 8, wenn man hier $A = T, B = S, C = M, D = S'$ setzt, $(ba; S) = \big(b(S'MT); M\big)$. Aus dem Korrolar zu Satz 17 folgt dann weiter $\big(a(S'MT); T\big) = 0$, d. h. $a = (S'MT)$, was wegen $M \notin a$ nicht geht; Widerspruch.

Von Satz 20 gilt auch die Umkehrung in der Form

Satz 20′. *Vorgelegt sei ein nichtausgeartetes $\beta\gamma\pi$-Kreisquaternar Σ dergestalt, daß für je drei verschiedene durch einen Punkt S gehende Kreise a, b, c mit $|a \cap b| = 2$, $|a \cap c| = 2$, $|c \cap b| = 1$ die Relation $(ab; S) = (ac; S)$ erfüllt ist. Dann genügen die Kreise von Σ dem Berührsatz.*

Der folgende Satz gilt unabhängig vom Berührsatz. Er ist in jedem nichtausgearteten $\beta\gamma\pi$-Kreisquaternar erfüllt.

Satz 21. *Seien a, b, c durch S gehende Kreise mit $|a \cap b| \geqq 2$, $|a \cap c| \geqq 2$, $b \neq c$, $(ab; S) = (ac; S)$. Dann ist $b \cap c = \{S\}$.*

Beweis. Wegen $b \neq c$ ist $a \neq b$, da sonst $(ab; S) = (ac; S)$ auf $a = c$, d. h. auf $b = c$ führte. Entsprechend ist $a \neq c$. Sei $a \cap b = \{S, S'\}$, $a \cap c = \{S, T\}$. Wegen $|a \cap b| \geqq 2$, $|a \cap c| \geqq 2$ ist also $S \neq S'$ und $S \neq T$. Es ist auch $S' \neq T$, da sonst $(ab; SS') = (ac; SS')$, $a \cap b = a \cap c$ nach Satz 7 den Widerspruch $b = c$ ergäbe. Nehmen wir nun im Gegensatz zur Behauptung des Satzes $b \cap c = \{S, M\}$, $S \neq M$, an, so ist sicherlich $M \neq T$ (sonst wäre $a = (TSS') = b$) und auch $M \neq S'$ (sonst wäre $a = (TSS') = (TSM) = c$). Wegen $(ab; SS') = (ac; ST)$ wäre nun

$$\begin{bmatrix} S' & S \\ M & T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T & S \\ M & S' \end{bmatrix} \cdot r \text{ mit } r \in \mathfrak{U},$$

und damit $-1 = (S', T, M, S) = r \begin{bmatrix} S' & T \\ S & M \end{bmatrix}$, was $\begin{bmatrix} S' & T \\ S & M \end{bmatrix} = \frac{-1}{r} \in \mathfrak{U}$ bedeutete. Widerspruch.

Im folgenden wenden wir uns speziellen Büschelecken — den *Orthogonalecken* — zu.

Definition. *Gilt für eine freie Büschelecke* $\mathfrak{o} \neq 0$ *die Gleichung* $\mathfrak{o} + \mathfrak{o} = 0$, *so heiße sie eine Orthogonalecke. Ist* $(ab; SS')$ *eine repräsentierende Büschelecke, so heißen* a, b — *in dieser Reihenfolge — zueinander orthogonal, in Zeichen* $a \perp b$.

Da mit $\mathfrak{o}$ auch $-\mathfrak{o}$ Orthogonalecke ist und da aus $(ab; SS') \in \mathfrak{o}$ stets $(ba; SS') \in -\mathfrak{o}$ folgt, so gilt mit $a \perp b$ auch $b \perp a$.

Der folgende Satz sagt über die Struktur aller Orthogonalecken aus:

Satz 22. *Die Menge* (OE) *der Orthogonalecken bildet zusammen mit der Nullbüschelecke eine Untergruppe* OE *der Gruppe aller Büschelecken.*

Beweis. Ist $\mathfrak{o}_1, \mathfrak{o}_2 \in OE$, so folgt $\mathfrak{o}_1 + \mathfrak{o}_2 \in OE$ wegen

$$(\mathfrak{o}_1 + \mathfrak{o}_2) + (\mathfrak{o}_1 + \mathfrak{o}_2) = (\mathfrak{o}_1 + \mathfrak{o}_1) + (\mathfrak{o}_2 + \mathfrak{o}_2) = 0.$$

Mit $\mathfrak{o}$ ist weiterhin $-\mathfrak{o} \in OE$.

Wir betrachten jetzt die Geometrien einiger $\beta\gamma\pi$-Kreisquaternare (im Sinne der zu Beginn gegebenen Beispiele 2) im Hinblick auf die Anzahl ihrer Orthogonalecken[19]).

1. Sei $\mathfrak{K}_1$ der Restklassenkörper mod 2, $\mathfrak{K}_2$ der Körper, der aus $\mathfrak{K}_1$ durch Adjunktion einer Nullstelle ϑ des Polynoms $x^2 + x + 1 = 0$ entsteht. Hier gibt es keine Restklasse $R\mathfrak{U}$, $R \notin \mathfrak{U}$, von $\mathfrak{G}/\mathfrak{U}$ mit $R\mathfrak{U} \cdot R\mathfrak{U} = \mathfrak{U}$. Wäre nämlich $R^2 \in \mathfrak{U}$ für $R = t + t'\vartheta$ mit $t, t' \in \mathfrak{K}_1$, so hätte man

$$t^2 + t'^2\vartheta^2 = (t^2 + t'^2) + t'^2\vartheta \in \mathfrak{U},$$

was $t' = 0$, d. h. $R \in \mathfrak{U}$ bedeutete; Widerspruch. Im Falle dieser Geometrie gibt es also keine Orthogonalecke. — Dieses Ergebnis gilt stets, wenn $\mathfrak{K}_2$ separable quadratische Erweiterung von $\mathfrak{K}_1$ und Charakteristik $(\mathfrak{K}_1) = 2$ ist.

2. $\mathfrak{K}_1$ sei ein Körper von Charakteristik 2, der ein Nichtquadrat s enthält; ferner sei $\mathfrak{K}_2 = \mathfrak{K}_1(\vartheta)$, $\vartheta^2 + s = 0$. Hier ist wegen

$$R^2 = (t + t'\vartheta)^2 = t^2 + st'^2 \in \mathfrak{U}$$

jede freie Büschelecke $\neq 0$ Orthogonalecke. — Dieses Ergebnis gilt stets, wenn $\mathfrak{K}_2$ inseparable Erweiterung von $\mathfrak{K}_1$ ist.

3. $\mathfrak{K}_1$ sei ein Körper von Charakteristik $\neq 2$, $\mathfrak{K}_2$ sei eine — sofern vorhandene — quadratische Erweiterung von $\mathfrak{K}_1$:

$$\mathfrak{K}_2 = \mathfrak{K}_1(\vartheta), \quad \vartheta^2 = r\vartheta + r' \text{ mit } r, r' \in \mathfrak{K}_1.$$

Ist $R = t + t'\vartheta \in \mathfrak{U}$ mit $t, t' \in \mathfrak{K}_1$, d. h. $t' \neq 0$, und

$$R^2 = t^2 + t'^2\vartheta^2 + 2tt'\vartheta = (t^2 + t'^2r') + (t'^2r + 2tt')\vartheta \in \mathfrak{U},$$

so ist $t'(t'r + 2t) = 0$, d. h. $t = -\frac{1}{2}rt'$. Damit gibt es genau eine Restklasse $R\mathfrak{U} \neq \mathfrak{U}$ mit $R\mathfrak{U} \cdot R\mathfrak{U} = \mathfrak{U}$, nämlich $(-\frac{1}{2}r + \vartheta)\mathfrak{U}$. Es gibt also weiterhin genau eine Orthogonalecke.

4. $\mathfrak{K}_1$ sei der rationale, $\mathfrak{K}_2$ der komplexe Zahlkörper. Man zeigt, daß es genau abzählbar viele Orthogonalecken gibt.

In jeder Geometrie eines nichtausgearteten $\beta\gamma\pi$-Kreisquaternars gilt der folgende

Satz 23. *Es sei* a *ein Kreis und es seien* S, S' *zwei auf* a *gelegene verschiedene Punkte. Dann gibt es durch* S, S' *genau* $|(OE)|$ *Kreise, die zu* a *orthogonal sind.*

Beweis. $(ax; SS') \in \mathfrak{o}$ führt auf genau eine Lösung $x(\mathfrak{o})$. Wegen $x(\mathfrak{o}_1) \neq x(\mathfrak{o}_2)$ für $\mathfrak{o}_1 \neq \mathfrak{o}_2$ ist die Behauptung bewiesen.

---

[19]) Die Fälle 1, 2, 3 entsprechen den von v. d. Waerden, Smid [15] axiomatisch begründeten Kreisgeometrien.

§ 4. Beziehungen zum Begriff Trennung.

Anordnungsfragen speziell in der Kreisgeometrie haben Hoffman [6], Pieri [11], Petkantschin [9] untersucht. Die von Petkantschin benutzten Trennungsaxiome A 7, A 8, A 9 besagen nacheinander:

1) Q, R, S, T sei ein eigentliches Punktequadrupel auf einem Kreis. Gilt dann QR/ST (d. h. das Punktepaar Q, R trennt das Punktepaar S, T), so auch ST/QR, RQ/ST.

2) Ist Q, R, S, T ein eigentliches Punktequadrupel auf einem Kreis, so gilt genau eine der Relationen QR/ST, RS/QT, SQ/RT.

3) Es seien A, B, P_1, P_2, P_3 fünf verschiedene Punkte auf einem Kreis. Dann trennt A, B genau zwei oder keines der Paare P_1P_2, P_2P_3, P_3P_1.

Bei einem axiomatischen Vorgehen hat man im wesentlichen alle Trennungseigenschaften, wenn diese im zugrundeliegenden Koordinatenbereich eine volle Anordnung bedingen. Wir wollen jetzt eine solche volle algebraische Anordnung auch im Falle einer Kreisgeometrie über gewissen Kreisquaternaren kennzeichnen. Für diesen Zweck erweisen sich die angegebenen Trennungsaxiome 1), 2), 3) als geeignet, aber nicht als ausreichend:

Ist $\mathfrak{K}_1$ der Körper aller Zahlen $r + r'i$ (r, r' rational), ist $\mathfrak{K}_2 = \mathfrak{K}_1(\sqrt{2})$, so sei Σ die durch $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2$ (im Sinne der Beispiele 2 (§ 1)) definierte Kreisgeometrie. Wir benutzen im folgenden die Veranschaulichung der Gaußschen Zahlenebene, denken uns also $\mathfrak{K}_2 \cup \{\infty\}$ in die Gaußsche Zahlenebene eingebettet. Bedeuten dann $\arg A$ bzw. $|A|$ das übliche Argument bzw. den üblichen Betrag, so werde „A vor B" wie folgt definiert: Sind A, B untereinander und von ∞ verschiedene Punkte, so sei genau dann A *vor* B, wenn $|A| < |B|$ bzw. im Falle $|A| = |B|$, wenn $0 \leqq \arg A < \arg B < 2\pi$ ist. Ist A von ∞ verschieden, so sei stets A *vor* ∞. (Für das Folgende beachte man die Eigenschaften: Für zwei verschiedene Punkte A, B gilt eine und nur eine der Relationen A vor B, B vor A. Und aus A vor B, B vor C folgt A vor C.) Hat man dann — Q, R, S, T sei ein eigentliches Quadrupel auf einem Kreis — eine der Reihenfolgen Q vor S vor R vor T, Q vor T vor R vor S oder eine Reihenfolge, die aus einer der angeschriebenen durch eine Substitution der Kleinschen Vierergruppe hervorgeht, so werde QR/ST gesetzt und sonst $QR \nmid ST$. Jetzt sind zwar die Eigenschaften 1), 2), 3) erfüllt (im wesentlichen liegt die Ordnung eines Halbstrahles vor), $\mathfrak{K}_1$ ist aber nicht anordenbar.

Das Axiom A 10 von Petkantschin [9] lautet: Es seien k_1, k_2 zwei Kreise durch die verschiedenen Punkte A, B und k ein weiterer Kreis. Falls k_1 den Kreis k in zwei Punkten A_1, B_1 mit A_1B_1/AB schneidet, haben auch die Kreise k_2 und k genau zwei gemeinsame Punkte A_2, B_2, so daß A_2B_2/AB gilt. Dies Axiom kann nicht hinzugenommen werden, da es z. B. nicht in der Geometrie ^iP (§ 1) gilt, obwohl dort $\mathfrak{K}_1$ (Körper der rationalen Zahlen) angeordnet werden kann.

Im folgenden sei ein $\beta\gamma\pi$-Kreisquaternar zugrunde gelegt, in dem es einen Kreis gibt, der mindestens vier verschiedene Punkte enthält. Dann enthält jeder Kreis mindestens vier verschiedene Punkte und insbesondere liegt ein nichtausgeartetes $\beta\gamma\pi$-Kreisquaternar vor. Es gilt

Satz 24. $\mathfrak{U}$ *besitzt dann und nur dann eine Untergruppe* $\mathfrak{U}^+$ *vom Index* 2 *mit den Eigenschaften*:

(a) $-1 \in \mathfrak{U}^+$ [20]),

(b) *Sind* A, B, C *paarweise verschiedene Punkte,* D *ein von* A, B *verschiedener Punkt, so folgt aus* $\begin{bmatrix} A & B \\ D & C \end{bmatrix} \in \mathfrak{U}^+$ *auch* [21]) $\begin{bmatrix} A & C \\ H(ABD) & B \end{bmatrix} \in \mathfrak{U}^+$ [22]),

---

[20]) Es ist also $-1 \neq 1$ und daher für drei verschiedene Punkte P, Q, R stets $H(PQR) \neq R$.

[21]) Man beachte, daß $H(ABD) \neq C$ ist, da sonst im Falle $C \neq D$

$$\begin{bmatrix} A & B \\ D & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ D & H(ABD) \end{bmatrix} = -1 \notin \mathfrak{U}^+$$

wäre.

[22]) Diese Eigenschaft stellt in anderer Formulierung das starke Monotoniegesetz der Addition dar.

wenn stets vier verschiedenen, gemeinsam auf einem Kreise gelegenen Punkten Q, R, S, T genau eines der Symbole QR/ST, $QR \dagger ST$ zugeordnet werden kann mit den Einschränkungen 1), 2), 3) *und*

4) *Aus* QR/ST *und* $\begin{bmatrix} Q & R \\ T & S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K & L \\ N & M \end{bmatrix}$ *folgt* KL/MN.

Beweis. $\mathfrak{U}$ besitze eine Untergruppe $\mathfrak{U}^+$ vom Index 2 mit den Eigenschaften (a), (b). Ist $\begin{bmatrix} Q & R \\ T & S \end{bmatrix} \in \mathfrak{U} - \mathfrak{U}^+$, so setzen wir QR/ST; ist $\begin{bmatrix} Q & R \\ T & S \end{bmatrix} \in \mathfrak{U}^{+\prime} = \mathfrak{U}^+ - \{1\}$, so sei $QR \dagger ST$. Gilt nun $ST \dagger QR$ bzw. $RQ \dagger ST$, d. h. $\begin{bmatrix} S & T \\ R & Q \end{bmatrix} \in \mathfrak{U}^{+\prime}$ bzw. $\begin{bmatrix} R & Q \\ T & S \end{bmatrix} \in \mathfrak{U}^{+\prime}$, so gilt wegen

$$\begin{bmatrix} Q & R \\ T & S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S & T \\ R & Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & Q \\ T & S \end{bmatrix}^{-1} \in \mathfrak{U}^{+\prime}$$

beidesmal $QR \dagger ST$. Das beweist 1).

Da $\mathfrak{U}^+$ Untergruppe von $\mathfrak{U}$ vom Index 2 ist, hat man die disjunkte Zerlegung $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}^+ \cup (-1)\,\mathfrak{U}^+$. Ist also $u \in \mathfrak{U}^+$, so ist $(-1)\,u \in (-1)\,\mathfrak{U}^+ = \mathfrak{U} - \mathfrak{U}^+$; ist $u \in \mathfrak{U} - \mathfrak{U}^+$, so ist u von der Form $u = (-1)v$, $v \in \mathfrak{U}^+$, was $(-1)\,u = (-1)\,(-1)\,v = v \in \mathfrak{U}^+$ bedeutet. (Wir nennen die Elemente von $\mathfrak{U}^+$ positiv, die von $(-1)\,\mathfrak{U}^+$ negativ.) Jetzt zum Beweis von 2): Wären alle drei Doppelverhältnisse

$$\begin{bmatrix} Q & R \\ T & S \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} R & S \\ T & Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q & T \\ S & R \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} S & Q \\ T & R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q & S \\ R & T \end{bmatrix}$$

negativ, so wäre nach dem eben Bewiesenen $(-1)\begin{bmatrix} Q & R \\ T & S \end{bmatrix}$ positiv. Das bedeutete aber mit

$$\begin{bmatrix} Q & R \\ H(QRT) & S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q & R \\ H(QRT) & T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q & R \\ T & S \end{bmatrix} = (-1) \begin{bmatrix} Q & R \\ T & S \end{bmatrix} \in \mathfrak{U}^+$$

und (b), daß

$$\begin{bmatrix} Q & S \\ T & R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q & S \\ H(QRH(QRT)) & R \end{bmatrix} \in \mathfrak{U}^+, \text{ d. h. } \begin{bmatrix} Q & S \\ R & T \end{bmatrix} \in \mathfrak{U}^+$$

ist, was nicht sein sollte. Es gilt $\begin{bmatrix} Q & R \\ T & S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R & S \\ T & Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S & Q \\ T & R \end{bmatrix} = (Q, R, S, T) = -1$ nach Satz 14. Wären nun genau zwei der Doppelverhältnisse negativ, so müßte auch das dritte negativ sein. Wäre keines der Doppelverhältnisse negativ, so wäre ihr Produkt, d. h. also -1, Element von $\mathfrak{U}^+$. Damit muß genau eines der drei Doppelverhältnisse negativ sein. Das beweist 2). Behauptung 3) folgt aus $\begin{bmatrix} A & B \\ P_2 & P_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ P_3 & P_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ P_1 & P_3 \end{bmatrix} = 1$.

Zu 4): Es folgt $\begin{bmatrix} K & L \\ N & M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q & R \\ T & S \end{bmatrix} \in \mathfrak{U} - \mathfrak{U}^+$, d. h. KL/MN.

Sei umgekehrt jetzt stets vier verschiedenen, gemeinsam auf einem Kreise liegenden Punkten Q, R, S, T genau eines der Symbole QR/ST, $QR \dagger ST$ zuordenbar mit den Eigenschaften 1) bis 4). Wir konstruieren eine Menge $\mathfrak{M}^+$ geordneter Quadrupel: $\mathfrak{M}^+$ enthalte alle $(QRST)$, wenn Q, R, S, T verschiedene Punkte auf einem Kreis mit $QR \dagger ST$ sind. Wegen 4) enthält $\mathfrak{M}^+$ mit jedem Quadrupel $(QRST)$ auch alle diejenigen, die das gleiche Doppelverhältnis wie $QRST$ besitzen. Wir bezeichnen die Menge der verschiedenen Doppel-

verhältnisse von $\mathfrak{M}^+$ mit $\mathfrak{U}^{+\prime}$. Es ist also $\mathfrak{U}^+ = \mathfrak{U}^{+\prime} \cup \{1\} \subseteq \mathfrak{U}$. Aus $\begin{bmatrix} Q & R \\ T & S \end{bmatrix} \in \mathfrak{U}^{+\prime}$ folgt $\begin{bmatrix} Q & R \\ S & T \end{bmatrix} \in \mathfrak{U}^{+\prime}$. Aus $QR \not\parallel ST$ folgt nämlich $QR \not\parallel TS$. Denn QR/TS würde nach 1) QR/ST nach sich ziehen.

Seien Q, R, S, T und K, L, M, N eigentliche Quadrupel. Dann folgt aus

$$\begin{bmatrix} Q & R \\ T & S \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} K & L \\ N & M \end{bmatrix} \in \mathfrak{U}^+ \text{ auch } \begin{bmatrix} Q & R \\ T & S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K & L \\ N & M \end{bmatrix} \in \mathfrak{U}^+.$$

Man setze nämlich $\begin{bmatrix} K & L \\ N & M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q & R \\ X & T \end{bmatrix}$. Aus $KL \not\parallel MN$ kommt dann $QR \not\parallel TX$ nach 4). Im Falle $X = S$ ist $\begin{bmatrix} Q & R \\ T & S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q & R \\ X & T \end{bmatrix} = 1 \in \mathfrak{U}^+$. Sei $X \neq S$. Dann ist Q, R, S, T, X ein eigentliches Quintupel auf (QRT). Aus 3) folgt wegen $QR \not\parallel ST$ und $QR \not\parallel TX$ die Aussage $QR \not\parallel XS$. Damit ist $\begin{bmatrix} Q & R \\ S & X \end{bmatrix} \in \mathfrak{U}^+$, d. h. $\begin{bmatrix} Q & R \\ X & S \end{bmatrix} \in \mathfrak{U}^+$.

Da jeder Kreis mindestens vier verschiedene Punkte enthält, gibt es Quadrupel Q, R, S, T mit QR/ST (auch solche mit $QR \not\parallel ST$). Dies folgt aus 2). — Damit ist $\mathfrak{U}^+$ echte Untergruppe von $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{U}^+ \neq \{1\}$.

Wir beweisen die disjunkte Zerlegung: $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}^+ \cup (-1)\,\mathfrak{U}^+$.

I. $(-1)\,\mathfrak{U}^+ \subseteq \mathfrak{U} - \mathfrak{U}^+$. Sei $QR \not\parallel ST$. Angenommen, es wäre $(-1) \begin{bmatrix} Q & R \\ T & S \end{bmatrix} \in \mathfrak{U}^+$. Zunächst folgt aus 2) entweder RS/QT oder SQ/RT, d. h. nach 1) entweder QT/SR oder QS/RT. Aus $\mathfrak{U}^+ \ni (-1) \begin{bmatrix} Q & R \\ T & S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q & S \\ T & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q & T \\ R & S \end{bmatrix}$ folgte dann QS/RT, QT/SR. Widerspruch. Aus $(-1) \begin{bmatrix} Q & R \\ T & S \end{bmatrix} \in \mathfrak{U}^+$ bei $QR \not\parallel ST$ kommt auch noch $-1 \in \mathfrak{U}^+$, d. h. $-1 \neq 1$.

II. $\mathfrak{U} - \mathfrak{U}^+ \subseteq (-1)\,\mathfrak{U}^+$. Sei $\begin{bmatrix} Q & R \\ T & S \end{bmatrix} \in \mathfrak{U} - \mathfrak{U}^+$. Dann besagt dies QR/ST. Man löse $\begin{bmatrix} Q & R \\ T & S \end{bmatrix} = (-1) \begin{bmatrix} Q & R \\ X & S \end{bmatrix}$. Hieraus ergibt sich $\begin{bmatrix} Q & R \\ T & X \end{bmatrix} = -1$, was wegen $-1 \in \mathfrak{U} - \mathfrak{U}^+$ (vgl. I) auf QR/XT führt.

Q, R, S, T, X können als verschieden aufgefaßt werden ($X \neq T$, da sonst $-1 = 1$; im Falle $X = S$ ist nichts zu beweisen). Mit 3) und QR/XT, QR/TS hat man $QR \not\parallel SX$, was $\begin{bmatrix} Q & R \\ X & S \end{bmatrix} \in \mathfrak{U}^+$ bedeutet. Damit ist $\begin{bmatrix} Q & R \\ T & S \end{bmatrix} \in (-1)\,\mathfrak{U}^+$ und $\mathfrak{U}^+$ als Untergruppe von $\mathfrak{U}$ vom Index 2 nachgewiesen.

Jetzt seien A, B, C verschiedene Punkte und $D \neq A, B$ ein weiterer Punkt mit $\begin{bmatrix} A & B \\ D & C \end{bmatrix} \in \mathfrak{U}^+$. Dann ist $\begin{bmatrix} A & C \\ H(ABD) & B \end{bmatrix} \in \mathfrak{U}^+$ nachzuweisen. $A, B, C, D, H(ABD)$ liegen alle auf dem Kreis (ABC).

Fall 1: $C = D$. Damit ist $H(ABD) = H(ABC)$. Aus $AB/C\,H(ABC)$ folgt $CA \not\parallel B\,H(ABC)$ nach 2), d. h. $AC \not\parallel B\,H(ABC)$, was $\begin{bmatrix} A & C \\ H(ABC) & B \end{bmatrix} \in \mathfrak{U}^+$ bedeutet.

Fall 2: $C = H(ABD)$ kommt nicht vor, da dann

$$\begin{bmatrix} A & B \\ D & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ D & H(ABD) \end{bmatrix} = -1$$

ist; $\begin{bmatrix} A & B \\ D & C \end{bmatrix}$ sollte jedoch in $\mathfrak{U}^+$ liegen.

Fall 3: $A, B, C, D, H(ABD)$ sind fünf verschiedene Punkte. — Aus 3) folgt wegen $AB/D\,H(ABD)$ und $AB \dagger CD$ die Aussage $AB/H(ABD)\,C$. Nach 2) ergibt sich hieraus $B\,H(ABD) \dagger AC$, d. h. $AC \dagger B\,H(ABD)$, was $\begin{bmatrix} A & C \\ H(ABD) & B \end{bmatrix} \in \mathfrak{U}^+$ bedeutet.

Damit ist der Satz bewiesen.

Schwächt man Eigenschaft 2) (S. 74) ab in:

2') Ist Q, R, S, T ein eigentliches Punktequadrupel auf einem Kreis, so gilt entweder genau eine der Relationen QR/ST, RS/QT, SQ/RT oder aber alle drei,

so gestattet $\mathfrak{U}$ eine Halbordnung (vgl. Sperner [14]):

Satz 24'. *$\mathfrak{U}$ besitzt dann und nur dann eine Untergruppe $\mathfrak{U}^+$ vom Index 2 mit $-1 \in \mathfrak{U}^+$, wenn stets vier verschiedenen, gemeinsam auf einem Kreise gelegenen Punkten Q, R, S, T genau eines der Symbole QR/ST, $QR \dagger ST$ zugeordnet werden kann mit den Eigenschaften* 1), 2'), 3), 4).

Beweis. Der Beweis dieses Satzes kann unmittelbar dem des Satzes 24 entnommen werden. Allerdings braucht es jetzt kein eigentliches konzyklisches Quadrupel Q, R, S, T mit $QR \dagger ST$ zu geben. In diesem Falle enthält kein Kreis mehr als vier verschiedene Punkte; sonst gäbe es nach 3) doch Quadrupel Q, R, S, T mit $QR \dagger ST$. Da also dann jeder Kreis genau vier verschiedene Punkte enthält, ist $\mathfrak{U} = \{1, u\}$, $u \neq 1$, und $\mathfrak{U}^+ = \{1\}$ und also $\mathfrak{U}^+$ Untergruppe von $\mathfrak{U}$ vom Index 2. Es ist $u = -1$ (und damit $-1 \in \mathfrak{U}^+$): Seien k ein Kreis und Q, R, S, T die vier verschiedenen Punkte von k. Es ist

$$\begin{bmatrix} Q & R \\ T & S \end{bmatrix} \in \mathfrak{U}, \text{ d. h. } \begin{bmatrix} Q & R \\ T & S \end{bmatrix} = u,$$

$$\begin{bmatrix} Q & R \\ S & T \end{bmatrix} \in \mathfrak{U}, \text{ d. h. } \begin{bmatrix} Q & R \\ S & T \end{bmatrix} = u$$

und damit

$$u = \begin{bmatrix} Q & R \\ T & S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q & R \\ S & T \end{bmatrix} = -1.$$

§ 5. $\Theta \cup \{0, 1\}$ als Menge doppelter Komposition. Gestalt der Doppelverhältnisse.

Im folgenden sei ein nichtausgeartetes $\beta\gamma\pi$-Kreisquaternar zugrunde gelegt.

Definition (A). *Ist $p, q \in \mathfrak{G}$, sind A, B, C verschiedene Punkte und P, Q gemäß $\begin{bmatrix} A & B \\ P & C \end{bmatrix} = p$, $\begin{bmatrix} A & B \\ Q & C \end{bmatrix} = q$ bestimmt, so sei unter $p + q$ (zunächst abhängig von A, B, C) im Falle $Q \neq H(ABP)$ dasjenige $s \in \mathfrak{G}$ verstanden, für das $s = \begin{bmatrix} A & B \\ S & C \end{bmatrix}$ ist mit $\begin{bmatrix} A & P \\ S & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ Q & H(ABP) \end{bmatrix}$. Im Falle $Q = H(ABP)$ sei $p + q = 0$ gesetzt, wobei 0 ein weiteres zu $\mathfrak{G}$ hinzuzunehmendes Element darstellt. (Wir schreiben $\mathfrak{K}_2 = \mathfrak{G} \cup \{0\}$, $\mathfrak{K}_1 = \mathfrak{U} \cup \{0\}$.)*

Bemerkung. Man kann sich die Konstruktion des Additionsbegriffes an Hand von Fig. 3 veranschaulichen (spezieller Fall einer Desarguesschen Konfiguration).

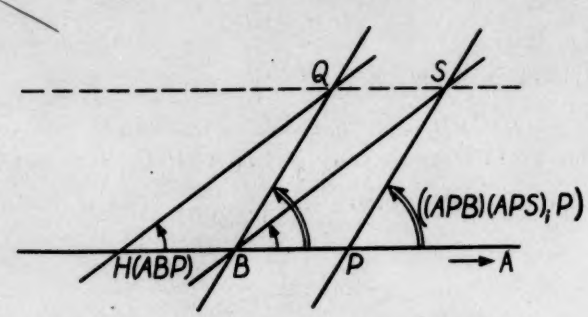

Fig. 3.

Zunächst sei gezeigt, daß $p + q$ für $p, q \in \mathfrak{G}$ unabhängig von den Grundpunkten A, B, C festgelegt ist. Ist nämlich A', B', C' ein weiteres eigentliches Tripel, sind P', Q' gemäß $\begin{bmatrix} A' & B' \\ P' & C' \end{bmatrix} = p$, $\begin{bmatrix} A' & B' \\ Q' & C' \end{bmatrix} = q$ bestimmt, so hat man

$$\begin{bmatrix} A & B \\ P & C \end{bmatrix} = p = \begin{bmatrix} A' & B' \\ P' & C' \end{bmatrix}, \tag{1}$$

$$\begin{bmatrix} A & B \\ Q & C \end{bmatrix} = q = \begin{bmatrix} A' & B' \\ Q' & C' \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Mit (1) und $\begin{bmatrix} A & B \\ H(ABP) & P \end{bmatrix} = -1 = \begin{bmatrix} A' & B' \\ H(A'B'P') & P' \end{bmatrix}$ ergibt sich durch Multiplikation

$$\begin{bmatrix} A & B \\ H(ABP) & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A' & B' \\ H(A'B'P') & C' \end{bmatrix}. \tag{3}$$

Vergleich mit (2) liefert: Ist $Q \neq H(ABP)$, so ist auch $Q' \neq H(A'B'P')$ und umgekehrt. Ergeben also die Grundpunkte A, B, C die Relation $p + q = 0$, so auch die Grundpunkte A', B', C' und umgekehrt.

Sei $Q \neq H(ABP)$. Dann ergeben (2) und (3) vermittels Division

$$\begin{bmatrix} A & B \\ Q & H(ABP) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A' & B' \\ Q' & H(A'B'P') \end{bmatrix}, \tag{4}$$

da $A, B, H(ABP)$ und $A', B', H(A'B'P')$ eigentliche Tripel sind. Nach Definition von S bzw. S' ist also

$$\begin{bmatrix} A & P \\ S & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A' & P' \\ S' & B' \end{bmatrix}, \text{ d. h. } \begin{bmatrix} A & B \\ S & P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A' & B' \\ S' & P' \end{bmatrix},$$

was durch Multiplikation mit (1) auf $\begin{bmatrix} A & B \\ S & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A' & B' \\ S' & C' \end{bmatrix}$ führt, q. e. d.

Im Falle $Q = H(ABP)$ ergibt

$$\begin{bmatrix} A & P \\ S & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ Q & H(ABP) \end{bmatrix} \tag{5}$$

nach einer bereits getroffenen Vereinbarung $S = B$. Vereinbart man weiterhin, daß

$$\begin{bmatrix} A & B \\ X & C \end{bmatrix} = 0 = \begin{bmatrix} A' & B' \\ X' & C' \end{bmatrix} \qquad (A, B, C \text{ und } A', B', C' \text{ eigentliche Tripel})$$

dann und nur dann gelten soll, wenn $X = B$, $X' = B'$ ist, so wird $p + q$ auch noch im Falle $Q = H(ABP)$ durch $\begin{bmatrix} A & B \\ S & C \end{bmatrix}$ richtig angegeben.

Schließlich sei noch $0 + p = p + 0 = p$ für alle $p \in \mathfrak{K}_2$ gesetzt. Im Falle $p \neq 0$ wird $p + 0 = p$ nach der getroffenen Vereinbarung ebenfalls noch vermittels (5) erfaßt.

Der folgende Satz enthält eine andere Definition von $p + q$; sie kann allerdings nur für $p \neq q$ vorgenommen werden.

Satz 25. *Sind A, B, C verschiedene Punkte, ist* $\begin{bmatrix} A & B \\ P & C \end{bmatrix} = p \in \mathfrak{K}_2$, $\begin{bmatrix} A & B \\ Q & C \end{bmatrix} = q \in \mathfrak{K}_2$, $p \neq q$, *so ist* $\begin{bmatrix} A & Q \\ B & P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & P \\ S & Q \end{bmatrix}$ *notwendig und hinreichend für* $p + q = \begin{bmatrix} A & B \\ S & C \end{bmatrix}$.

Beweis. Notwendigkeit: Ist $p = 0$ oder $q = 0$, so ist nichts zu beweisen. Im anderen Falle sind also A, Q, P, B verschiedene Punkte. Es gilt nach Definition von $p + q$ und Satz 14

$$\begin{bmatrix} A & P \\ S & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ Q & H(ABP) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ P & H(ABP) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ Q & P \end{bmatrix} = (-1) \begin{bmatrix} A & B \\ Q & P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & Q \\ B & P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & P \\ Q & B \end{bmatrix}.$$

Damit ist

$$\begin{bmatrix} A & P \\ B & Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & P \\ S & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & Q \\ B & P \end{bmatrix}, \text{ d. h. } \begin{bmatrix} A & P \\ S & Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & Q \\ B & P \end{bmatrix}.$$

Hinlänglichkeit: Aus

$$\begin{bmatrix} A & B \\ Q & H(ABP) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & Q \\ B & P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & P \\ Q & B \end{bmatrix} \text{ und } \begin{bmatrix} A & P \\ S & Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & Q \\ B & P \end{bmatrix}$$

folgt die Behauptung für $P, Q \neq B$. Der Fall $P = B$ oder $Q = B$ ist trivial.

Korrolar. *Ist $p, q \in \mathfrak{K}_2$, so gilt $p + q = q + p$.*

Beweis. Im Falle $p = q$ ist das trivial. Im Falle $p \neq q$ hat man die Behauptung sofort aus Satz 25 und der Eigenschaft β.

Bevor allgemein das assoziative Gesetz $p + (q + r) = (p + q) + r$ nachgewiesen wird, ein Spezialfall:

(S) *Ist $p, q \in \mathfrak{K}_2$, so gilt $p + (1 + q) = (p + 1) + q$.*

Wir weisen[23]) $p + (1 + q) = (1 + p) + q$ nach, was wegen der Gültigkeit des kommutativen Gesetzes der Addition dasselbe bedeutet. Für $p = 0$ oder $q = 0$ oder $p = q$ liegen Trivialitäten vor. Sei also $p \neq 0$, $q \neq 0$, $p \neq q$. Dann zeigen wir zunächst:

$$(1) \qquad -1 + (1 + q) = q = (1 + (-1)) + q.$$

[23]) Da im folgenden Beweis und in den Beweisen der Sätze 26, 27 nur Doppelverhältnisse $\begin{bmatrix} K & L \\ N & M \end{bmatrix}$ auftreten, in denen K ein fester Punkt A ist, kürzen wir an diesen Stellen solche Doppelverhältnisse durch $[L, M, N]$ ab.

Nach Definition (A) gilt[24])

$$[B, H(AB\,H(ABC)),\ S_{1+q}] = [H(ABC),\ B,\ S_{-1+(1+q)}],$$

was wegen $H(AB\,H(ABC)) = C$

$$(2) \qquad [B, C, S_{1+q}] = [H(ABC), B, S_{-1+(1+q)}]$$

bedeutet. Bildet man $1 + q$, so kommt man auf $[B, H(ABC), S_q] = [C, B, S_{1+q}]$, was

$$(3) \qquad [H(ABC), B, S_q] = [B, C, S_{1+q}]$$

ergibt. Da $A, B, H(ABC)$ ein eigentliches Tripel ist, folgt aus (2), (3) die Gleichheit $S_q = S_{-1+(1+q)}$. Damit ist $-1 + (1 + q) = q$.

Um $q = (1 + (-1)) + q$ nachzuweisen, braucht man nur

$$(3') \qquad 1 + (-1) = 0$$

zu zeigen. Dies folgt aus der allgemeinen Formel (3), wenn man hier $q = -1$, d. h. $S_q = H(ABC)$ setzt. Das bedeutet nämlich $S_{1+(-1)} = B$. (Umgekehrt folgt aus $q \neq -1$ stets $1 + q \neq 0$. Ist nämlich $1 + q = 0$, d. h. $S_{1+q} = B$, so besagt (3) nur $S_q = H(ABC)$, d. h. $q = -1$.)

Wegen (1) können wir $p \neq -1$ voraussetzen. Damit ist also $1 + p \neq 0$. (Abkürzend schreiben wir $t = p + (1 + q)$, $r = (1 + p) + q$.)

Sodann wird behauptet:

$$(4) \qquad [B, S_p, S_q] = [S_{1+p}, S_{(1+p)+p}, S_r].$$

Zum Beweise bilde man $(1 + p) + p$:

$$(5) \qquad [B, H(ABS_{1+p}), S_p] = [S_{1+p}, B, S_{(1+p)+p}]$$

und $(1 + p) + q$:

$$(6) \qquad [B, H(ABS_{1+p}), S_q] = [S_{1+p}, B, S_r].$$

Aus (5), (6) folgt durch Division die Behauptung (4).

Aus (4) folgt noch $S_{1+p} \neq S_{(1+p)+p}$, da A, B, S_p, S_q ein eigentliches Punktequadrupel ist.

Ferner wird behauptet:

$$(7) \qquad [S_{p+(1+p)}, S_{1+p}, S_p] = [S_{1+p}, C, B].$$

Wegen $-1 + (1 + p) = p$ (vgl. (1)) und (4) — man setze hier S_q speziell gleich $H(ABC)$ — gilt nämlich

$$[B, S_p, H(ABC)] = [S_{1+p}, S_{(1+p)+p}, S_{(1+p)+(-1)}] = [S_{1+p}, S_{(1+p)+p}, S_p],$$

d. h. $[S_{(1+p)+p}, S_{1+p}, S_p] = [S_p, B, H(ABC)]$. Nach (2) gilt aber $-p$ für q gesetzt $[H(ABC), B, S_p] = [B, C, S_{1+p}]$; damit hat man insgesamt die Behauptung (7).

Aus (7) folgt $S_{1+p} \neq C$ wegen $S_{(1+p)+p} \neq S_{1+p}$.

Schließlich zeigen wir:

$$(8) \qquad [B, S_p, S_q] = [S_{1+p}, S_{(1+p)+p}, S_t].$$

---

[24]) Grundpunkte sind im folgenden stets — wenn nicht ausdrücklich vermerkt — die paarweise verschiedenen Punkte A, B, C. Statt $p = [B, C, P]$ schreiben wir $p = [B, C, S_p]$; entsprechend wird geschrieben $1 + q = [B, C, S_{1+q}]$. Die Schreibweise S mit einem Ausdruck als Index stellt also immer die Lösung X von Ausdruck $= [B, C, X]$ dar.

Ist dies bewiesen, so im Verein mit (4) auch die Behauptung (S), da — vgl. (4) — $A, S_{1+p}, S_{(1+p)+p}$ paarweise verschiedene Punkte sind und also $S_t = S_r$, d. h. $t = r$ folgt.

Zum Beweise: Man bilde $p + (1 + p)$ für $p \neq -1, 0$:

$$[B, H(ABS_p), S_{1+p}] = [S_p, B, S_{p+(1+p)}]. \tag{9}$$

Weiterhin bilde man $p + (1 + q)$ für $q \neq -1, 0$ und $q \neq p$:

$$[B, H(ABS_p), S_{1+q}] = [S_p, B, S_t]. \tag{10}$$

Aus (9), (10) folgt $[B, S_{1+p}, S_{1+q}] = [S_p, S_{p+(1+p)}, S_t]$ und hieraus $[S_{p+(1+p)}, S_p, S_t] = [S_{1+p}, B, S_{1+q}]$. Letzteres besagt mit (7)

$$[S_{p+(1+p)}, S_{1+p}, S_t] = [S_{1+p}, C, S_{1+q}]. \tag{11}$$

Man bilde jetzt $1 + p$, $1 + q$:

$$[B, H(ABC), S_p] = [C, B, S_{1+p}], \quad [B, H(ABC), S_q] = [C, B, S_{1+q}]$$

implizieren

$$[B, S_p, S_q] = [C, S_{1+p}, S_{1+q}].$$

Substituiert man hier (11), so hat man die Behauptung (8).

Setzen wir, was bisher noch nicht geschah, $0p = p\,0 = 0$ für alle $p \in \mathfrak{K}_2$, so gilt

Satz 26. *Sind p, q, r Elemente von $\mathfrak{K}_2$, so gilt $p(q + r) = pq + pr$.*

Beweis. Die Fälle, in denen $p = 0$ oder $q = 0$ oder $r = 0$ ist, sind trivial. Sei also $p \neq 0, q \neq 0, r \neq 0$ und $p = [B, C, P]$, $q = [B, P, Q]$, $r = [B, P, R]$. Dann ist $pq = [B, C, Q]$, $pr = [B, C, R]$ und $pq + pr = [B, C, S]$, wo

$$[B, H(ABQ), R)] = [Q, B, S] \tag{1}$$

ist. Bezüglich der Grundpunkte A, B, P ist $q + r = [B, F, T]$ mit

$$[B, H(ABQ), R] = [Q, B, T]. \tag{2}$$

(1) und (2) ergeben $T = S$, d. h.

$$p(q + r) = [B, C, P]\,[B, P, S] = [B, C, S] = pq + pr, \qquad \text{q. e. d.}$$

Satz 27. *$\mathfrak{K}_2$ bildet bezüglich der Verknüpfung „+" eine abelsche Gruppe. Dabei ist 0 das Einheitselement, (— 1) p das zu p inverse Element — p. $\mathfrak{K}_1$ bildet — im Falle eines nicht-ausgearteten $\beta\gamma\pi$-Kreisquaternars — eine Untergruppe von $\mathfrak{K}_2$.*

Beweis. Daß $p + q \in \mathfrak{K}_2$ ist für $p, q \in \mathfrak{K}_2$, liegt unmittelbar an der Definition der Addition. Die Assoziativität $r + (s + t) = (r + s) + t$ folgt sehr einfach aus der schon bewiesenen Regel $p + (1 + q) = (p + 1) + q$ und Satz 26. Denn für $s = 0$ ist nichts zu beweisen. Im anderen Falle setze man $p = s^{-1}r$, $q = s^{-1}t$. Dann gilt mit der Assoziativität der ersteingeführten Verknüpfung „ · " (sprich Multiplikation)

$$r + (s + t) = s(s^{-1}r) + s(1 + s^{-1}t) = s(s^{-1}r + (1 + s^{-1}t))$$
$$= s((s^{-1}r + 1) + s^{-1}t) = s(s^{-1}r + 1) + s(s^{-1}t) = (r + s) + t.$$

Zum Einheitselement: Nach Definition ist stets $0 + p = p + 0 = p$. Behauptung: Es ist $(-1)\,p + p = 0$, so daß also $-p = (-1)\,p$ gilt. Für $p = 0$ ist nichts zu beweisen. Sei $p \neq 0$. Mit der bereits bewiesenen Formel $1 + (-1) = 0$ (vgl. Formel (3′) beim Beweise von (S)) gilt

$$0 = p\,0 = p(1 + (-1)) = p + p(-1) = p + (-1)\,p = (-1)\,p + p,$$

wobei man Satz 26, die Kommutativität der Multiplikation und die der Addition (Korrolar zu Satz 25) beachtet.

Behauptung: Aus $p, q \in \mathfrak{K}_1$ folgt $p + q \in \mathfrak{K}_1$. Mit $p \in \mathfrak{K}_1$ ist $-p \in \mathfrak{K}_1$. Wegen $-1 \in \mathfrak{U}$ gilt nämlich $-p = (-1)\,p \in \mathfrak{U}$ für $p \neq 0$; damit ist also stets $-p \in \mathfrak{K}_1$. Zu $p + q \in \mathfrak{K}_1$: Für $p = 0$ oder $q = 0$ oder $p + q = 0$ ist nichts zu beweisen. Sei zunächst $p = q = 1$. Wegen

$$[C, B, S_{1+1}] = [B, H(ABC), C] = -1 \in \mathfrak{K}_1$$

ist $1 + 1 = 0 \in \mathfrak{K}_1$ im Falle $C = H(ABC)$ und sonst $1 + 1 = [B, C, S_{1+1}] \in \Delta$ nach KQ 2. Sei weiterhin $p = q \neq 1$. Man hat wegen $p + p = p(1 + 1)$ und $1 + 1 \in \mathfrak{K}_1$ die Behauptung. Im Falle $p \neq q$, $p + q \neq 0$, $p, q \neq 0$, gilt $[P, Q, B] = [Q, P, S_{p+q}]$ nach Satz 25. Wegen $[B, C, P] \in \mathfrak{K}_1$, $[B, C, Q] \in \mathfrak{K}_1$ gilt $[B, P, Q] \in \mathfrak{K}_1$ nach KQ 1, KQ 2, d. h. $[P, Q, B] \in \mathfrak{K}_1$ nach KQ 2, was $[Q, P, S_{p+q}] \in \mathfrak{K}_1$ bedeutet. Aus $[Q, B, P]$, $[Q, P, S_{p+q}] \in \mathfrak{K}_1$ folgt $[Q, B, S_{p+q}] \in \mathfrak{K}_1$, d. h. $[B, Q, S_{p+q}] \in \mathfrak{K}_1$. Hiermit und mit $[B, C, Q] \in \mathfrak{K}_1$ folgt $[B, C, S_{p+q}] \in \mathfrak{K}_1$.

Satz 28. *Ist* $(\mathfrak{P}; \Theta > \Delta; \sigma)$ *ein nichtausgeartetes* $\beta\gamma\pi$*-Kreisquaternar, so läßt sich in* Θ *unter Hinzunahme zweier neuer Elemente* 0, 1 *eine Addition und eine Multiplikation einführen, so daß* $\mathfrak{K}_2 = \Theta \cup \{0, 1\}$ *bezüglich dieser Verknüpfungen einen kommutativen Körper bildet.* $\mathfrak{K}_1 = \Delta \cup \{0, 1\}$ *ist ein echter Unterkörper von* $\mathfrak{K}_2$.

Beweis. Folgt aus den Sätzen 26, 27 im Verein mit der Tatsache, daß $\mathfrak{G}$ bezüglich der Verknüpfung „ $\cdot$ “ eine abelsche Gruppe bildet.

Die Aussage von Satz 28 bezog sich auf nichtausgeartete $\beta\gamma\pi$-Kreisquaternare. Im Falle eines ausgearteten $\beta\gamma\pi$-Kreisquaternars ist zwar die entsprechend definierte Menge $\mathfrak{K}_1$ ein Körper, hingegen ist $\mathfrak{K}_1 = \{0, 1\}$ wegen $\Delta = \emptyset$ und $-1 \neq 1$ kein Körper. — $\mathfrak{K}_1$ Körper, $\mathfrak{K}_1 = \{0, 1\}$, $-1 \neq 1$, kennzeichnet also die ausgearteten $\beta\gamma\pi$-Kreisquaternare.

Wir wenden uns jetzt der formelmäßigen Gestalt der Doppelverhältnisse zu. Dazu sei ein weiteres Hilfsmittel hergeleitet:

Satz 29. *Es seien* P, Q, R *paarweise verschiedene Punkte,* S *ein von* P *verschiedener Punkt. Dann gilt*

$$\begin{bmatrix} P & Q \\ S & R \end{bmatrix} = 1 - \begin{bmatrix} P & R \\ S & Q \end{bmatrix}.$$

Beweis. In den Fällen $S = Q$ oder $S = R$ ist dies gemäß den getroffenen Vereinbarungen klar. Sei also P, Q, R, S ein eigentliches Quadrupel. Es ist

$$1 - \begin{bmatrix} P & R \\ S & Q \end{bmatrix} = 1 + (-1) \begin{bmatrix} P & R \\ S & Q \end{bmatrix} = 1 + \begin{bmatrix} P & R \\ H(PRS) & S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P & R \\ S & Q \end{bmatrix} = 1 + \begin{bmatrix} P & R \\ H(PRS) & Q \end{bmatrix}.$$

Setzt man $\begin{bmatrix} P & R \\ X & Q \end{bmatrix} = 1 + \begin{bmatrix} P & R \\ H(PRS) & Q \end{bmatrix}$, so ist nach Definition (A) — Grundpunkte sind jetzt P, R, Q —

$$\begin{bmatrix} P & Q \\ X & R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P & R \\ H(PRS) & H(PRQ) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P & R \\ Q & H(PRQ) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P & R \\ H(PRS) & Q \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} P & R \\ Q & H(PRQ) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P & R \\ H(PRS) & S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P & R \\ S & Q \end{bmatrix} = (-1)(-1) \begin{bmatrix} P & R \\ S & Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P & R \\ S & Q \end{bmatrix}.$$

Damit ist $\begin{bmatrix} P & R \\ X & Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P & Q \\ S & R \end{bmatrix}$, q. e. d.

Es seien A, B, C verschiedene Punkte. Es seien P, Q, R, S weitere, paarweise verschiedene Punkte mit zunächst $A \in \{P, Q, R, S\}$. Dann ist

$$\begin{bmatrix} A & B \\ S & Q \end{bmatrix} = \frac{\begin{bmatrix} A & B \\ S & C \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} A & B \\ Q & C \end{bmatrix}},$$

falls $Q \neq B$ ist. Mit Satz 29 folgt hieraus

$$(1) \qquad \begin{bmatrix} A & Q \\ S & B \end{bmatrix} = 1 - \begin{bmatrix} A & B \\ S & Q \end{bmatrix} = 1 - \frac{\begin{bmatrix} A & B \\ S & C \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} A & B \\ Q & C \end{bmatrix}} = \frac{\begin{bmatrix} A & B \\ Q & C \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A & B \\ S & C \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} A & B \\ Q & C \end{bmatrix}}.$$

Ersetzt man S durch R in (1), so ergibt die entstehende Gleichung zusammen mit (1) wegen $S \neq Q$

$$(2) \qquad \begin{bmatrix} A & Q \\ R & S \end{bmatrix} = \frac{\begin{bmatrix} A & Q \\ R & B \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} A & Q \\ S & B \end{bmatrix}} = \frac{\begin{bmatrix} A & B \\ Q & C \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A & B \\ R & C \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} A & B \\ Q & C \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A & B \\ S & C \end{bmatrix}}.$$

Im Falle $Q = B$ gilt (2) formal aber auch noch.

Ersetzt man Q durch P in (2), so erhält man zusammen mit (2) wegen

$$\begin{bmatrix} P & Q \\ S & R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & S \\ Q & P \end{bmatrix} = \frac{\begin{bmatrix} A & P \\ R & S \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} A & Q \\ R & S \end{bmatrix}}$$

die Gleichung

$$(3) \qquad \begin{bmatrix} P & Q \\ S & R \end{bmatrix} = \frac{\begin{bmatrix} A & B \\ P & C \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A & B \\ R & C \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} A & B \\ P & C \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A & B \\ S & C \end{bmatrix}} : \frac{\begin{bmatrix} A & B \\ Q & C \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A & B \\ R & C \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} A & B \\ Q & C \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A & B \\ S & C \end{bmatrix}}.$$

Ist $A \in \{P, Q, R, S\}$, so schreiben wir disjunktiv an:

1. $P = A$. Mit (2) gilt

$$(4) \qquad \begin{bmatrix} P & Q \\ S & R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & Q \\ S & R \end{bmatrix} = \frac{\begin{bmatrix} A & B \\ Q & C \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A & B \\ S & C \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} A & B \\ Q & C \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A & B \\ R & C \end{bmatrix}}.$$

2. $Q = A$. Es ist dann

$$\begin{bmatrix} P & Q \\ S & R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & P \\ R & S \end{bmatrix}$$

und man hat eine leicht durch Umbenennung aus (4) zu gewinnende Formel. Das gleiche gilt in den verbleibenden Fällen

3. $R = A$

4. $S = A$, wenn man

$$\begin{bmatrix} P & Q \\ S & R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & S \\ Q & P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & S \\ Q & P \end{bmatrix} \text{ bzw.}$$

$$\begin{bmatrix} P & Q \\ S & R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & R \\ P & Q \end{bmatrix} \text{ beachtet.}$$

Damit hat man neben Satz 28 den

Satz 28'. *Sind A, B, C verschiedene Punkte, ist P, Q, R, S ein beliebiges eigentliches Punktequadrupel, so läßt sich $\sigma(PQRS)$ auf die folgende — klassische — Gestalt bringen für $A \neq P, Q, R, S$:*

$$\sigma(PQRS) = \frac{\sigma(ABCP) - \sigma(ABCR)}{\sigma(ABCP) - \sigma(ABCS)} : \frac{\sigma(ABCQ) - \sigma(ABCR)}{\sigma(ABCQ) - \sigma(ABCS)}.$$

Tritt A unter den Punkten P, Q, R, S auf, so gewinnt man $\sigma(PQRS)$ aus der angegebenen Formel dadurch, daß man die Differenzen $\sigma(ABCK) - \sigma(ABCL)$ mit $A \in \{K, L\}$ durch 1 ersetzt.

§ 6. Bedingung für die Gültigkeit des Berührsatzes.

Vorgegeben sei ein nichtausgeartetes $\beta\gamma\pi$-Kreisquaternar $(\mathfrak{P}; \Theta > \Delta; \sigma)$. Wir geben eine notwendige und hinreichende Bedingung — in der Doppelverhältnissprechweise — dafür, daß die Kreise von $(\mathfrak{P}; \Theta > \Delta; \sigma)$ dem Berührsatz genügen.

Sind A, B, C, F paarweise verschiedene Punkte, so wollen wir unter $\mathfrak{S}(A, B, C, F)$ die folgende Aussage verstehen: Zu jedem weder auf (ABC) noch auf (ABF) gelegenen Punkt P gibt es weitere — nicht auf (ABF) gelegene — Punkte P', P'' mit $P' \in (ABP)$ und $\begin{bmatrix} A & P'' \\ B & F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & F \\ P' & P'' \end{bmatrix}$.

Nun gilt:

Satz 30. *Dann und nur dann genügen die Kreise von $(\mathfrak{P}; \Theta > \Delta; \sigma)$ dem Berührsatz, wenn es paarweise verschiedene Punkte A, B, C, F mit $\mathfrak{S}(A, B, C, F)$ gibt.*

Beweis. a) Es gelte stets der Berührsatz. Dann weisen wir die Existenz von paarweise verschiedenen Punkten A, B, C, F nach, die der Eigenschaft $\mathfrak{S}(A, B, C, F)$ genügen.

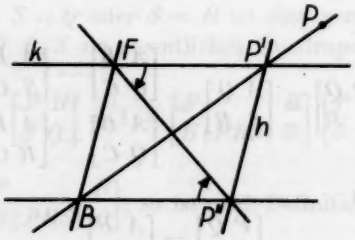

Fig. 4.

Sei (ABC) ein beliebiger Kreis, A, B, C ein eigentliches Tripel, $F \in (ABC)$ ein weiterer Punkt. Mit k bezeichnen wir den durch F gehenden Kreis, der (ABC) in A berührt. Ist jetzt P ein weder auf (ABC) noch (ABF) liegender Punkt, so sei P' der von A verschiedene Schnittpunkt von k mit (ABP). (Berührten sich (ABP) und k in A, so gäbe es durch B zwei verschiedene Kreise, nämlich (ABC), (ABP), die k in A berührten.) Wegen $P \in (ABF)$ ist $P' \in (ABF)$. Ist h der Kreis durch P', der (ABF) in A berührt, so sei P'' der von A verschiedene Schnittpunkt von h mit (ABC). (Berührten sich h und (ABC) in A, so berührten k, $h \neq k$ den Kreis (ABC) in A und gingen beide durch P'.) Bei dieser Konstruktion gilt sicherlich $P'' \in (ABF)$ und $P' \in (ABP)$. Es gilt aber auch $\begin{bmatrix} A & P'' \\ B & F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & F \\ P' & P'' \end{bmatrix}$.

Nach Satz 20 ist

$$((AP''F)\,(AP''B);\,A) = ((AFP'')\,k;\,A)$$

und auch

$$((AFP'')\,(AFB);\,A) = ((AP''F)\,h;\,A).$$

Damit ist nach den Sätzen 6, 9

$$((AP''F)\,(AP''B);\,P'') = ((AFP'')\,k;\,F),$$
$$((AFP'')\,(AFB);\,F) = ((AP''F)\,h;\,P''),$$

was nach Satz 10 mit $k = (AFP')$, $h = (AP''P')$ die Behauptung bedeutet.

b) Sei umgekehrt $\mathfrak{S}(A, B, C, F)$ erfüllt. Dann besitzt jedes $p \in \mathfrak{K}_2$ eindeutig bestimmte Elemente p_1, p_2 aus $\mathfrak{K}_1$ mit $p = p_1 + p_2 f$, $f = \begin{bmatrix} A & B \\ F & C \end{bmatrix}$. Man setze $p = \begin{bmatrix} A & B \\ P & C \end{bmatrix}$. Im Falle $P \in (ABF)$ hat man $p = 0 + \begin{bmatrix} A & B \\ P & F \end{bmatrix} f$. Im Falle $P \in (ABC)$ ist $p = \begin{bmatrix} A & B \\ P & C \end{bmatrix} + 0f$ eine gesuchte Darstellung. In den weiteren Fällen hat man zu P wegen $\mathfrak{S}(A, B, C, F)$ Punkte P', P'' mit $P', P'' \in (ABF)$, $P' \in (ABP)$, so daß $\begin{bmatrix} A & P'' \\ B & F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & F \\ P' & P'' \end{bmatrix}$ gilt. Letztere Gleichung besagt nach Satz 25

$$\begin{bmatrix} A & B \\ P' & C \end{bmatrix} = f + \begin{bmatrix} A & B \\ P'' & C \end{bmatrix}.$$

Man hat dann die Darstellung

$$\begin{bmatrix} A & B \\ P & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ P & P' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ P'' & C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A & B \\ P & P' \end{bmatrix} f.$$

Daß jedes $p \in \mathfrak{K}_2$ in der angegebenen Weise ausgedrückt werden kann, impliziert wegen $\mathfrak{K}_2 - \mathfrak{K}_1 \neq \emptyset$ die Aussage $f \notin \mathfrak{K}_1$, d. h. $F \notin (ABC)$.

Die Darstellung $p = p_1 + p_2 f$ ist eindeutig: Wäre $p_1 + p_2 f = p = p_1' + p_2' f$, so wäre $(p_1 - p_1') = (p_2' - p_2)\,f$, was für $p_2' \neq p_2$ den Widerspruch $f \in \mathfrak{K}_1$ nach sich zöge und für $p_2' = p_2$ doch $p_1 = p_1'$ bedeutete. $\mathfrak{K}_2$ ist also quadratische Erweiterung von $\mathfrak{K}_1$, was die Gültigkeit des Berührsatzes impliziert (vgl. Hoffman [7]).

Korrolar. *Ist* $(\mathfrak{P}; \Theta > \Delta; \sigma)$ *ein nichtausgeartetes* $\beta\gamma\pi$*-Kreisquaternar, so gelten die äquivalenten Bedingungen von Satz* 30 *genau dann, wenn* $\mathfrak{K}_2$ *quadratische Erweiterung von* $\mathfrak{K}_1$ *ist.*

§ 7. Bedingung für die Gültigkeit des Büschelsatzes.

Wir wenden uns jetzt dem Büschelsatz, *unabhängig vom Berührsatz* zu. Vorab ein Bemerkung: Man zeigt, daß im Falle $\gamma \in \mathfrak{K}_2 - \mathfrak{K}_1$ die Gleichung

$$1 = \gamma u + \frac{1}{1 - \frac{1}{\gamma}} v$$

höchstens eine Lösung $u, v \in \mathfrak{K}_1$ aufweist. Im Falle zweier Lösungen u, v und u', v' hätte man nämlich

$$\gamma(u - u') + \frac{1}{1 - \frac{1}{\gamma}} (v - v') = 0, \quad (\gamma - 1)(u - u') = -(v - v'),$$

was für $u \neq u'$

$$\gamma = 1 - \frac{v - v'}{u - u'} \in \mathfrak{K}_1$$

bedeutete und für $u = u'$ auch $v = v'$ zur Folge hätte.

Der folgende Satz charakterisiert nun — bis auf einen anzugebenden Ausnahmefall — die Kreisgeometrien über nichtausgearteten $\beta\gamma\pi$-Kreisquaternaren, in denen der Büschelsatz gilt:

Satz 31. *Die Kreise eines nichtausgearteten $\beta\gamma\pi$-Kreisquaternars* $(\mathfrak{P}; \Theta > \Delta; \sigma)$ *genügen dem Büschelsatz, wenn folgende Bedingung* (T) *gilt: Ist $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathfrak{K}_2 - \mathfrak{K}_1$ und haben*

$$(1) \qquad 1 = \gamma_i u_i + \frac{1}{1 - \frac{1}{\gamma_i}} v_i, \qquad i = 1, 2,$$

Lösungen $u_i, v_i \in \mathfrak{K}_1$, so gilt $u_1 \frac{\gamma_1}{\gamma_2} + u_2 \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \in \mathfrak{K}_1$. Ist umgekehrt durchweg der Büschelsatz erfüllt und enthält jeder Kreis mindestens sechs verschiedene Punkte, so gilt (T).

Beweis. Wir beweisen zunächst die letzte Aussage, nehmen also jetzt die Gültigkeit des Büschelsatzes an. Er lautet: Sind $A, B, C_1, C_2, A', B', C_1', C_2'$ acht verschiedene Punkte mit $C_1, C_2 \in (A'AB)$, so ist $C_1'C_1C_2'C_2$ konzyklisch, wenn die Punktequadrupel $A'AB'B$, $A'AC_1'C_1$, $A'AC_2'C_2$, $B'BC_1'C_1$, $B'BC_2'C_2$ es sind.

a) Es seien γ_1, γ_2 Elemente von $\mathfrak{K}_2 - \mathfrak{K}_1$ dergestalt, daß es $\mathfrak{K}_1$-Lösungen u_i von (1) gibt. Man kann $\frac{\gamma_1}{\gamma_2} \in \mathfrak{K}_1$ voraussetzen, da sonst nichts mehr zu beweisen ist. Sind jetzt A', A, B irgend drei verschiedene Punkte, so bestimme man B' aus $\begin{bmatrix} A' & A \\ B & B' \end{bmatrix} = e$, wobei e ein festes Element aus $\mathfrak{K}_1$ mit $e \neq u_1, u_2, 0, 1$ darstelle. Ein solches Element gibt es, da ja jeder Kreis mindestens sechs verschiedene Punkte aufweist, d. h. $|\mathfrak{K}_1| \geqq 5$ ist. Es seien C_1, C_2 die Punkte, für die $\begin{bmatrix} A' & A \\ C_i & B \end{bmatrix} = \gamma_i$ ist, $i = 1, 2$ (hieraus folgt $C_i \in (A'AB)$), fernerhin C_1', C_2' die Punkte, für die $\begin{bmatrix} A' & A \\ C_i' & B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A' & A \\ C_i & B \end{bmatrix} u_i$ ist. Man hat $C_i' \neq C_i$, da sonst $u_i = \begin{bmatrix} A' & A \\ B & B' \end{bmatrix} = e$ wäre. Behauptung: $A, B, C_1, C_2, A', B', C_1', C_2'$ sind paarweise verschiedene Punkte. Zum Beweise beachte man $u_i \neq 0$ und

$$\begin{bmatrix} A' & A \\ C_1 & C_2 \end{bmatrix} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \in \mathfrak{K}_1.$$

Nun gilt

$$\begin{bmatrix} A' & B' \\ C_i' & A \end{bmatrix} = 1 - \begin{bmatrix} A' & A \\ C_i' & B' \end{bmatrix} = 1 - \begin{bmatrix} A' & A \\ C_i & B \end{bmatrix} u_i = 1 - \gamma_i u_i = \frac{1}{1 - \frac{1}{\gamma_i}} v_i = \begin{bmatrix} A' & C_i \\ A & B \end{bmatrix} v_i,$$

was — man beachte $v_i \neq 0$ —

$$((A'B'A)(A'B'C_i');\, B') = ((A'C_iB)(A'C_iA);\, C_i)$$

oder

$$((A'B'B)(A'B'C_i');\, B') = ((A'C_iB)(A'C_iC_i');\, C_i)$$

bedeutet. Letzteres besagt gemäß Satz 18′, daß $BB'C_1C_1'$ ein konzyklisches Quadrupel ist und auch, daß $BB'C_2C_2'$ ein konzyklisches Quadrupel ist. Damit ist nach dem Büschelsatz auch $C_1C_1'C_2C_2'$ konzyklisch, was wiederum nach Satz 18′ (nach Wechsel der Repräsentanten) auf

$$\begin{bmatrix} A' & C_1' \\ C_2' & A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A' & C_2 \\ A & C_1 \end{bmatrix} m \text{ mit } m \in \mathfrak{U},$$

führt. Nun kommt hieraus

$$1 - \begin{bmatrix} A' & A \\ C_2' & C_1' \end{bmatrix} = \frac{1}{1 - \begin{bmatrix} A' & A \\ C_1 & C_2 \end{bmatrix}} m, \text{ d. h. } 1 - \frac{1}{u_1}\frac{\gamma_2}{\gamma_1} u_2 = \frac{1}{1 - \frac{1}{\gamma_2}\gamma_1} m,$$

da $\begin{bmatrix} A' & A \\ C_2' & C_1' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A' & A \\ B' & C_1' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A' & A \\ C_2' & B' \end{bmatrix} = \frac{1}{u_1}\frac{\gamma_2}{\gamma_1} u_2$ ist. Damit hat man in der Tat

$$u_1 \frac{\gamma_1}{\gamma_2} + u_2 \frac{\gamma_2}{\gamma_1} = u_1(1 - m) + u_2 \in \mathfrak{K}_1.$$

b) Es gelte (T). Dann wollen wir den Büschelsatz beweisen. Es seien also $A, B, C_1, C_2, A', B', C_1', C_2'$ verschiedene Punkte mit $C_1, C_2 \in (A'AB)$ dergestalt, daß die Quadrupel $A'AB'B$, $A'AC_1'C_1$, $A'AC_2'C_2$, $B'BC_1'C_1$, $B'BC_2'C_2$ konzyklisch sind. (Wegen $C_i \in (A'AB)$ ist $\begin{bmatrix} A' & A \\ C_i & B \end{bmatrix} = \gamma_i \in \mathfrak{K}_1$.) Hieraus folgt

$$((A'AB')(A'AC_i');\, A) = ((A'AB)(A'AC_i);\, A),$$

$$((A'B'A)(A'B'C_i');\, B') = ((A'C_iB)(A'C_iA);\, C_i), \text{ d. h.}$$

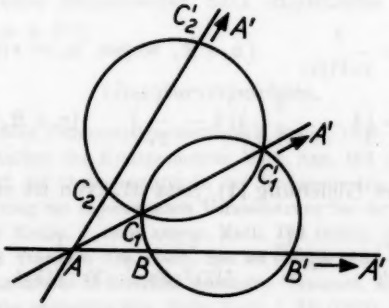

Fig. 5.

$$\begin{bmatrix} A' & A \\ C_i' & B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A' & A \\ C_i & B \end{bmatrix} u_i, \quad u_i \in \mathfrak{K}_1,$$

$$\begin{bmatrix} A' & B' \\ C_i' & A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A' & C_i \\ A & B \end{bmatrix} v_i, \quad v_i \in \mathfrak{K}_1,$$

was zusammenaddiert

$$1 = \gamma_i u_i + \frac{1}{1 - \frac{1}{\gamma_i}} v_i$$

ergibt. Setzt man

$$(*) \qquad \begin{bmatrix} A' & C_1' \\ C_2' & A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A' & C_2 \\ A & C_1 \end{bmatrix} m,$$

so errechnet man m wie unter a) zu

$$m = 1 - \frac{1}{u_1}\left(u_1 \frac{\gamma_1}{u_2} + u_2 \frac{\gamma_2}{\gamma_1}\right) + \frac{1}{u_1} u_2 \in \mathfrak{K}_1,$$

letzteres wegen (T). (Es ist $m \neq 0$, da die angeschriebenen Punkte alle verschieden sind. Gemäß Satz 18′ bedeutet aber (*) die Behauptung.

Anmerkung. Es gilt auch die Gleichung

$$(**) \qquad \begin{bmatrix} C_1 & C_2' \\ C_1' & C_2 \end{bmatrix} = m \begin{bmatrix} A' & C_1' \\ A & C_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A' & C_2 \\ A & C_2' \end{bmatrix}, \quad m = 1 - \frac{1}{u_1}\left(u_1 \frac{\gamma_1}{\gamma_2} + u_2 \frac{\gamma_2}{\gamma_1}\right) + \frac{1}{u_1} u_2.$$

Der Beweis von Satz 31 hätte schneller auf der Basis von (**) geführt werden können. Das unterblieb, um den geometrischen Hintergrund dieser Gleichung nicht zu verwischen.

(**) soll in einer weiteren Arbeit benutzt werden, um Satz 31 auf ein allgemeineres Fundament zu stellen. (**) wird sich dabei als die Wurzel weiterer geometrischer Sätze erweisen in der Art, in der Peczar einen anderen algebraischen Satz ([8], Satz 5) deutet ([8], Beispiele a), b), c)).

Ist $\mathfrak{K}_2$ quadratische Erweiterung von $\mathfrak{K}_1$, so gilt (T), *womit der Büschelsatz in diesen Geometrien nachgewiesen ist*[25]):

a) Im Falle einer separablen Erweiterung gestattet $\mathfrak{K}_2$ einen von der Identität verschiedenen involutorischen Automorphismus τ, dessen Fixkörper $\mathfrak{K}_1$ ist. In diesem Fall sind

$$u_i = \frac{1}{\gamma_i \tau(\gamma_i)} \qquad (u_i \in \mathfrak{K}_1 \text{ wegen } u_i = \tau(u_i)),$$

$$v_i = \left(1 - \frac{1}{\tau(\gamma_i)}\right)\left(1 - \frac{1}{\gamma_i}\right) \qquad (v_i \in \mathfrak{K}_1)$$

die gesuchten Lösungen der Gleichung (1), Satz 31. Nun ist offensichtlich

$$u_1 \frac{\gamma_1}{\gamma_2} + u_2 \frac{\gamma_2}{\gamma_1} = \frac{1}{\tau(\gamma_1) \cdot \gamma_2} + \frac{1}{\gamma_1 \cdot \tau(\gamma_2)} \in \mathfrak{K}_1.$$

---

[25]) Ist $\mathfrak{K}_1$ nicht quadratisch erweiterbar, d. h. quadratisch abgeschlossen, so kommt man zu keiner Kreisgeometrie, in der der Berührsatz gilt.

b) Im Falle einer inseparablen Erweiterung ist $\mathfrak{K}_1$ von Charakteristik 2. Da dann zu jedem $p \in \mathfrak{K}_2$ stets $p^2 \in \mathfrak{K}_1$ ist, hat man

$$u_i = \frac{1}{\gamma_i^2} \in \mathfrak{K}_1, \; v_i = \left(1 - \frac{1}{\gamma_i^2}\right)^2 \in \mathfrak{K}_1.$$

Damit ist

$$u_1 \frac{\gamma_1}{\gamma_2} + u_2 \frac{\gamma_2}{\gamma_1} = 0 \in \mathfrak{K}_1.$$

Daß (T) *nicht kennzeichnend für quadratische Erweiterungen ist, zeigt folgendes Beispiel (zitiert durch* **Geometrie Ω**):

Es sei R der Restklassenkörper mod 2, $\mathfrak{K}_1$ der Funktionenkörper über R in zwei Unbestimmten x, y. Man zeigt, daß x, y Nichtquadrate über $\mathfrak{K}_1$ sind. Wir adjungieren jetzt zu $\mathfrak{K}_1$ die Größen μ, ν, wobei $\mu^2 = x$, $\nu^2 = y$. Der so entstehende Körper $\mathfrak{K}_2$ ist vom Rang 4 über $\mathfrak{K}_1$. Wiederum ist für jedes $p \in \mathfrak{K}_2$ stets $p^2 \in \mathfrak{K}_1$ und $u_1 \frac{\gamma_1}{\gamma_2} + u_2 \frac{\gamma_2}{\gamma_1} = 0$, wenn $u_i = \frac{1}{\gamma_i^2}$ die (existenten) Lösungen von Gleichung (1) darstellen.

Man gehe jetzt von axiomatischen Punkten und Kreisen aus, die bezüglich einer Inzidenzrelation den Verknüpfungsaxiomen $\mathfrak{B}$ genügen:

$\mathfrak{B}_1$: Es gibt einen Punkt und einen Kreis, die nicht inzident liegen.

$\mathfrak{B}_2$: Durch drei verschiedene Punkte geht ein und nur ein Kreis.

$\mathfrak{B}_3$: Jeder Kreis besitzt mindestens drei verschiedene Punkte.

Dann mag die folgende Tabelle mit einen Überblick über die axiomatische Abhängigkeit bzw. Unabhängigkeit des Satzes von Miquel, Berührsatzes, Büschelsatzes, Existenz einer Winkelrelation geben. Unter dem vollen Miquelschen Satz wird die Aussage Axiom VI in van der Waerden, Smid [15], verstanden. Unter $\mathfrak{W}$ sei die Existenz einer Relation „=" zwischen Büschelecken (Def. § 2) (Winkeln) verstanden mit den Eigenschaften $\mathfrak{W}_1$ bis $\mathfrak{W}_4$ (vgl. Einleitung):

1. $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{W}$, Büschelsatz, Miquelscher Satz implizieren nicht den Berührsatz (Geometrie Ω; vgl. hierzu § 2).
2. $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{W}$, Miquelscher Satz implizieren nicht den Büschelsatz (Geometrie Ψ; betr. $\mathfrak{W}$ vgl. man § 2).
3. $\mathfrak{B}$, Berührsatz, Büschelsatz implizieren nicht den Miquelschen Satz (v. d. Waerden Smid, [15], S. 758).
4. $\mathfrak{B}$, Berührsatz, voller Miquelscher Satz implizieren den Büschelsatz (vgl. v. d. Waerden, Smid, a. a. O.).

Literaturverzeichnis.

[1] *W. Blaschke*, Vorlesungen über Differentialgeometrie III. Berlin, 1929.

[2] *G. Ewald*, Axiomatischer Aufbau der Kreisgeometrie. Math. Ann. **131** (1956), 354—371.

[3] *G. Ewald*, Über den Begriff der Orthogonalität in der Kreisgeometrie. Math. Ann. **131** (1956), 463—469.

[4] *H. Freudenthal*, Die Bedeutung der topologischen Voraussetzung bei der Buckel-van Heemertschen Charakterisierung des Systems der Kreise. J. reine angew. Math. **194** (1955), 190—192.

[5] *M. Hall*, Projective planes. Transact. Am. Math. Soc. **54** (1943), 229—277.

[6] *A. J. Hoffman*, On the foundations of inversion geometry. Transact. Am. Math. Soc. **71** (1951), 218—242.

[7] *A. J. Hoffman*, Chains in the projective line. Duke Math. J. **18** (1951), 827—830.

[8] *L. Peczar*, Über eine einheitliche Methode zum Beweis gewisser Schließungssätze. Mh. Math. **54** (1950), 210—220.

[9] *B. Petkantschin*, Über die Orientierung der Kugel in der Möbiusschen Geometrie. Jber. deutsch. Math.-Ver. **51** (1941), 124—147.

[10] *B. Petkantschin*, Axiomatischer Aufbau der zweidimensionalen Möbiusschen Geometrie. Annuaire Univ. Sofia II, Fac. Phys.-Math. **1** (1940), 219—325 (bulgarisch mit deutscher Zusammenfassung).

[11] *M. Pieri*, Nuovi principii di geometria delle inversioni. Giornale di Matematiche di Battaglini **49** (1911), 49—96 und **50** (1912), 106—140.

[12] *H. Prüfer*, Projektive Geometrie. Leipzig, 1953.

[13] *L. J. Smid*, Over Cirkelmeetkunden. Groningen, 1928.

[14] *E. Sperner*, Beziehungen zwischen geometrischer und algebraischer Anordnung. Sitz.ber. Heidelb. Akad. Wiss. **10** (1949).

[15] *B. L. v. d. Waerden, L. J. Smid*, Eine Axiomatik der Kreisgeometrie und der Laguerregeometrie. Math. Ann. **110** (1935), 753—776.

Eingegangen 13. April 1957.

Untersuchungen in Räumen mit rekurrenter Krümmung.

Von *Arthur Moór* in Szeged (Ungarn).

Einleitung.

Unter den Riemannschen Räumen sind die Räume von rekurrenter Krümmung durch die Gleichung

$$R_{i\,kl,m}^{\;\;j} = \varkappa_m R_{i\,kl}^{\;\;j} \tag{0.1}$$

gekennzeichnet, wo das Symbol: $_{,m}$ die kovariante Ableitung und $\varkappa_m$ einen kovarianten Vektor bedeutet. Die Theorie der durch die Gleichung (0. 1) charakterisierten Räume wurde von H. S. Ruse und A. G. Walker in mehreren Arbeiten eingehend studiert. Bezüglich der Krümmungsverhältnisse können diese Untersuchungen schon als abgeschlossen betrachtet werden mindestens in den zwei- drei- und vierdimensionalen Räumen[1]).

In den folgenden Untersuchungen wollen wir diese Theorie für die affinzusammenhängenden Räume und für diejenigen metrischen Räume entwickeln, in denen die Übertragungsparameter der Parallelübertragung der Vektoren nicht-symmetrisch sind.

Dementsprechend werden wir in § 1 die Fundamentalformeln der affinzusammenhängenden Räume und der allgemeinen metrischen Übertragungen zusammenstellen. In § 2 behandeln wir das Problem der Metrisierbarkeit der affinzusammenhängenden Räume von rekurrenter Krümmung, in § 3 weiter die Zerlegbarkeit dieser Räume und die Form des Krümmungstensors. Endlich wollen wir in § 4 die allgemeinen metrischen Punkträume von rekurrenter Krümmung untersuchen.

§ 1. Grundgrößen der affinzusammenhängenden und der allgemeinen metrischen Räume.

Ein n-dimensionaler Punktraum V_n ist ein affinzusammenhängender Raum, wenn in V_n die Parallelübertragung der ko- bzw. kontravarianten Vektoren durch das Verschwinden eines invarianten Differentials von der Form

$$D\xi^i = \xi^i|_k dx^k \quad \text{bzw.} \quad D\xi_i = \xi_i|_k dx^k \tag{1.1}$$

bestimmt ist, wo

$$\xi^i|_k \overset{\text{def}}{=} \partial_k \xi^i + L_r^{\;i}{}_k \xi^r \tag{1.2a}$$

bzw.

$$\xi_i|_k \overset{\text{def}}{=} \partial_k \xi_i - L_i^{\;r}{}_k \xi_r \tag{1.2b}$$

die kovariante Ableitung der kontra- bzw. kovarianten Vektoren bedeutet. (Vgl. [1] Kap. I und II, und [4] Kap. IV)[2]). Die Transformationsformeln der Übertragungsparameter $L_j^{\;i}{}_k$ bezüglich einer Koordinatentransformation

$$\bar{x}^i = \bar{x}^i(x^1\ x^2, \ldots, x^n)$$

---

[1]) Vgl. [3] und die Literaturangaben in [3].

[2]) In [4] ist die kovariante Ableitung durch eine andere Formel definiert als in (1. 2). Der Unterschied besteht darin, daß in der Formel der kovarianten Ableitung die unteren Indizes von $L_r^{\;i}{}_k$ gegenüber den in unseren Definitionsformeln (1. 2) vorkommenden Übertragungsparametern vertauscht sind.

sind durch

$$\bar{L}_i{}^j{}_k = L_t{}^r{}_s \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^r} \frac{\partial x^t}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^k} + \frac{\partial^2 x^r}{\partial \bar{x}^i \partial \bar{x}^k} \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^r} \tag{1.3}$$

festgelegt.

Im Raume V_n definiert der in i, k symmetrische Teil von $L_i{}^j{}_k$, nämlich

$$\Gamma_i{}^j{}_k \overset{\text{def}}{=} \tfrac{1}{2}(L_i{}^j{}_k + L_k{}^j{}_i) \equiv L_{(i}{}^j{}_{k)}, \tag{1.4}$$

einen neuen Übertragungsparameter. Offenbar haben die Übertragungsparameter $\Gamma_i{}^j{}_k$ nach (1.3) und (1.4) dieselbe Transformationsformel wie die $L_i{}^j{}_k$. Die kovariante Ableitung in bezug auf die symmetrischen Übertragungsparameter $\Gamma_i{}^j{}_k$ werden wir durch ein Komma bezeichnen, beispielsweise

$$\xi^i{}_{,k} \overset{\text{def}}{=} \partial_k \xi^i + \Gamma_r{}^i{}_k \xi^r.$$

Der in i, k schiefsymmetrische Teil von $L_i{}^j{}_k$, nämlich

$$\Omega_i{}^j{}_k \overset{\text{def}}{=} \tfrac{1}{2}(L_i{}^j{}_k - L_k{}^j{}_i) \equiv L_{[i}{}^j{}_{k]}, \tag{1.5}$$

ist auf Grund von (1.3) ein Tensor, der selbstverständlich in i, k schiefsymmetrisch ist. $\Omega_i{}^j{}_k$ wird als Torsionstensor bezeichnet.

Der Krümmungstensor der affinen Übertragung ist durch die Formel

$$L_i{}^j{}_{kl} \overset{\text{def}}{=} 2\,(\partial_{[k} L_{|i|}{}^j{}_{l]} + L_i{}^t{}_{[l} L_{|t|}{}^j{}_{k]}) \tag{1.6}$$

bestimmt[3]). Bei der Anwendung der symmetrischen Übertragung (1.4) bekommt man den Krümmungstensor

$$B_i{}^j{}_{kl} \overset{\text{def}}{=} 2\,(\partial_{[k} \Gamma_{|i|\,l]} + \Gamma_i{}^t{}_{[l} \Gamma_{|t|}{}^j{}_{k]}). \tag{1.7}$$

Diese Krümmungstensoren befriedigen die sog. Bianchischen Identitäten:

$$L_j{}^i{}_{kl}|_m + 2\, L_j{}^i{}_{kr} \Omega_l{}^r{}_m + \{\text{zykl.}\}_{klm} = 0, \tag{1.8}$$

bzw.

$$B_j{}^i{}_{kl,m} + \{\text{zykl.}\}_{klm} = 0, \tag{1.9}$$

wo $\{\text{zykl.}\}_{klm}$ den vorigen Ausdruck mit zyklischer Permutation der Indizes k, l, m bedeutet (Vgl. [5] Kap. III, (5.19) und (5.21); selbstverständlich geht unsere Formel (1.8) in die entsprechende Formel von [4] nur dann über, wenn noch die Bemerkung der Fußnote [2]) über den Übertragungsparameter $L_j{}^i{}_k$ beachtet wird.) Für den Krümmungstensor $B_j{}^i{}_{kl}$ bestehen noch die wichtigen Relationen:

$$B_j{}^i{}_{kl} + \{\text{zykl.}\}_{jkl} = 0. \tag{1.10}$$

Die Übertragung ist metrisch, falls die kovariante Ableitung des metrischen Grundtensors $g_{ik}(x)$ identisch Null ist. Es muß also

$$g_{ij}|_k \equiv \partial_k g_{ij} + L_{ijk} + L_{jik} = 0 \tag{1.11}$$

gelten. Bestimmen wir jetzt $L_i{}^j{}_k$ in der Form:

$$L_i{}^j{}_k = \{{}_i{}^j{}_k\} + \Lambda_i{}^j{}_k, \tag{1.12}$$

wo

$$\{{}_i{}^j{}_k\} \overset{\text{def}}{=} \tfrac{1}{2} g^{jr}(\partial_k g_{ir} + \partial_i g_{kr} - \partial_r g_{ik}) \tag{1.12a}$$

bedeutet, so folgt erstens, daß $\Lambda_i{}^j{}_k$ ein Tensor ist (vgl. z. B. [1], Gleichung (5.9) und die nachfolgenden Zeilen; bei uns steht statt $a_i{}^j{}_k$ der Tensor $\Lambda_i{}^j{}_k$; der Beweis des Tensor-

[3]) Bei mehreren Verfassern wird der Krümmungstensor statt der Formel (1.6) durch $R_i{}^j{}_{kl} = -L_i{}^j{}_{kl}$ definiert. Wir behalten die Bezeichnung der Arbeit [1] bei.

charakters geht aber ganz ähnlich wie bei der zitierten Formel von [1]), und zweitens folgt aus (1. 11) und (1. 12) unmittelbar, daß

$$\Lambda_{(ij)k} = 0, \quad \Lambda_{ijk} = g_{jt}\Lambda_{ik}^{t} \tag{1. 13}$$

gilt (vgl. auch [6]). Λ_{ijk} kann übrigens beliebig gewählt werden.

Aus den Relationen (1. 6) und (1. 12) folgt, daß die Krümmung der durch (1. 12) bestimmten Übertragung durch den Krümmungstensor

$$\dot{R}_{i}{}^{j}{}_{kl} = R_{i}{}^{j}{}_{kl} + S_{i}{}^{j}{}_{kl} \tag{1. 14}$$

festgelegt ist, wo $R_{i}{}^{j}{}_{kl}$ den Riemannschen Krümmungstensor bedeutet und

$$S_{i}{}^{j}{}_{kl} \overset{\text{def}}{=} 2\left(\Lambda_{i\,[l,k]}^{j} + \Lambda_{i\,[l}^{t}\Lambda_{|t|\,k]}^{j}\right) \tag{1. 15}$$

ist. Die explizite Formel für $R_{i}{}^{j}{}_{kl}$ ist durch (1. 7) bestimmt, wenn in der Formel (1. 7)

$$\Gamma_{i}{}^{j}{}_{k} = \left\{{}_{i}{}^{j}{}_{k}\right\}$$

gesetzt wird.

Der Riemannsche Krümmungstensor R_{ijkl} ist bekanntlich in den Indizes (i, j) und (k, l) schiefsymmetrisch; dasselbe gilt auch für den Krümmungstensor S_{ijkl}. Das kann nach der Formel (1. 15) unter Beachtung von (1. 13) unmittelbar verifiziert werden. Nach (1. 14) ist somit auch $\dot{R}_{ijkl}$ in (i, j) und (k, l) schiefsymmetrisch.

§ 2. Sätze über die Metrisierbarkeit der affinzusammenhängenden Räume von rekurrenter Krümmung.

Es soll V_n einen affinzusammenhängenden Raum bedeuten, in dem die Übertragung durch die symmetrischen Übertragungsparameter $\Gamma_{j}{}^{i}{}_{k}$ festgelegt ist. Der Raum V_n ist metrisierbar, falls das Differentialgleichungssystem

$$g_{ij,k} \equiv \partial_k g_{ij} - g_{tj}\Gamma_{ik}^{t} - g_{ti}\Gamma_{jk}^{t} = 0$$

für den symmetrischen Tensor g_{ij} lösbar ist (vgl. [1], § 29). Die Integrabilitätsbedingungen dieser Differentialgleichung sind durch das Gleichungssystem

$$g_{t(i}B_{j)}{}^{t}{}_{kl} = 0 \tag{2. 1a$_0$}$$

$$g_{t(i}B_{j)}{}^{t}{}_{kl,m_1} = 0 \tag{2. 1a$_1$}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$g_{t(i}B_{j)}{}^{t}{}_{kl,m_1,\ldots,m_r} = 0 \tag{2. 1a$_r$}$$

bestimmt, wo der Krümmungstensor $B_{j}{}^{i}{}_{kl}$ durch (1. 7) angegeben ist.

Für die Metrisierbarkeit der Übertragung $\Gamma_{j}{}^{i}{}_{k}$ im Raume V_n ist notwendig und hinreichend die Existenz einer Zahl N derart, daß die N ersten Gleichungsketten des Systems (2. 1) ein verträgliches Gleichungssystem für die g_{ij} bilden und die $(N+1)$-te Kette identisch befriedigt ist.

Nehmen wir jetzt an, daß der Raum V_n ein Raum von rekurrenter Krümmung ist. Das Analogon der Definitionsgleichung (0. 1) im Raume V_n ist

$$B_{i}{}^{j}{}_{kl,m} = \varkappa_m B_{i}{}^{j}{}_{kl}, \tag{2. 2}$$

wo der Krümmungstensor $B_{i}{}^{j}{}_{kl}$ des affinzusammenhängenden Raumes V_n durch (1. 7) bestimmt ist.

Ist $\varkappa_m$ nicht der Nullvektor, so folgt auf Grund der Gleichungen (2. 2) leicht, daß die Gleichungen (2. 1 a_0) bis (2. 1 a_r) sich auf (2. 1 a_0), d. h. auf

$$g_{ti} B_j{}^t{}_{kl} + g_{tj} B_i{}^t{}_{kl} = 0 \tag{2. 3}$$

reduzieren. Diese Gleichungen sind also die Bedingungen der Metrisierbarkeit eines Raumes V_n mit rekurrenter Krümmung.

Wir können somit den folgenden Satz behaupten:

Satz 1. *Die Lösbarkeit des Gleichungssystems* (2. 3) *in bezug auf den Tensor* g_{ij} *ist die notwendige und hinreichende Bedingung für die Metrisierbarkeit eines affinen Raumes* V_n *von rekurrenter Krümmung.*

Das Gleichungssystem (2. 3) besteht wegen der Schiefsymmetrie des Krümmungstensors $B_i{}^j{}_{kl}$ in den beiden letzten Indizes insgesamt aus

$$\nu = \tfrac{1}{4} n^2 (n^2 - 1) \qquad (n > 1)$$

Gleichungen. Da die Zahl der unbekannten Tensorkomponenten auf Grund der Symmetrie von g_{ij}

$$\nu^* = \tfrac{1}{2} n(n+1) \qquad (n > 1)$$

ist, wäre das Gleichungssystem (2. 3) immer lösbar, wenn $\nu \leqq \nu^*$ gälte[4]). Diese Relation besteht aber nur für $n = 2$, und in diesem Falle gilt in ihr das Gleichheitszeichen. Dann ist aber (2. 3) ein homogenes lineares Gleichungssystem. Offenbar müssen die trivialen Lösungen $g_{ij} = 0$ ausgeschlossen werden; somit bekommt man eine Lösung von (2. 3) nur, wenn die Determinante des Gleichungssystems verschwindet. Das ergibt den

Satz 2. *Die notwendige und hinreichende Bedingung für die Metrisierbarkeit eines zweidimensionalen affinen Raumes* V_2 *von rekurrenter Krümmung ist das Bestehen der Relation:*

$$\begin{vmatrix} B_1{}^1{}_{12} & B_1{}^2{}_{12} & 0 \\ B_2{}^1{}_{12} & (B_1{}^1{}_{12} + B_1{}^2{}_{12}) & B_1{}^2{}_{12} \\ 0 & B_2{}^1{}_{12} & B_2{}^2{}_{12} \end{vmatrix} = 0. \tag{2. 4}$$

Aus Satz 1 folgt für $n = 2$, daß (2. 4) für die Gültigkeit von Satz 2 notwendig und hinreichend ist.

Nehmen wir jetzt an, daß im affinzusammenhängenden Raum V_n von rekurrenter Krümmung $n - 1$ linear-unabhängige parallele Vektorfelder existieren. A. G. Walker hat in seiner Arbeit [5] bewiesen, daß, wenn V_n ein Riemannscher Raum ist, der Krümmungstensor verschwindet (vgl. [5], Satz (3. 1), S. 40). Ein affiner Raum kann aber $n - 1$ linear-unabhängige parallele Vektorfelder haben und ein Raum von rekurrenter Krümmung sein, ohne daß sein Krümmungstensor Null ist.

Wir bezeichnen einen affinzusammenhängenden Raum von rekurrenter Krümmung in dem $n - 1$ linear-unabhängige Vektorfelder existieren, mit V_n^*. Analytisch ist V_n^* dadurch definiert, daß für den Krümmungstensor (2. 2) gilt und das Differentialgleichungssystem

$$\lambda^i{}_{,k} = 0$$

$n - 1$ linear-unabhängige Lösungen für $\lambda^i(x)$ besitzt. In einem Raum V_n^* hat der Übertragungsparameter die Form

$$\Gamma^i_{\alpha k} = -\delta_\alpha{}^i \partial_k \log \psi_\alpha \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, n-1;\ \text{nicht summieren nach } \alpha), \tag{2. 3}$$

[4]) Im Falle $\nu < \nu^*$ existierte immer auch eine nicht-triviale Lösung.

wo ψ_α nur von x^α und x^n abhängig ist. $\Gamma_n{}^i{}_n$ ist beliebig (vgl. [1] § 9, insbes. (9. 15)). Wir setzen fest, daß in diesem Paragraphen die griechischen Indizes die Zahlen $1, 2, \ldots, n-1$ und die lateinischen die Zahlen $1, 2, \ldots, n$ durchlaufen sollen.

Beachten wir jetzt (2. 5) und die Tatsache, daß ψ_α nur von x^α und x^n abhängig ist, so folgt aus (1. 7), daß

$$B_\alpha{}^j{}_{kl} = B_n{}^j{}_{\alpha\beta} = 0 \tag{2. 6}$$

ist, wo der Index n selbstverständlich die n-te Komponente bedeutet und keine anderen Werte annehmen kann. Die von Null verschiedenen Komponenten des Krümmungstensors sind also $B_n{}^i{}_{\alpha n}$.

Für die Metrisierbarkeit eines Raumes V_n^* gilt:

Satz 3. *Ein Raum V_n^* ist metrisierbar, wenn das Gleichungssystem*

$$g_{jt} B_n{}^t{}_{\alpha n} = 0 \tag{2. 7}$$

lösbar ist.

Beweis. Nach Satz 1 ist die Bedingung für die Metrisierbarkeit durch (2. 3) bestimmt. Nach (2. 6) wird aus (2. 3):

$$g_{it} B_j{}^t{}_{\alpha n} + g_{jt} B_i{}^t{}_{\alpha n} = 0 \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n-1). \tag{2. 8}$$

Da diese Bedingung nach (2. 6) für $i \neq n$, $j \neq n$ identisch erfüllt ist, können wir $i = n$ annehmen. Dann geht aber (2. 8) in die Gleichung (2. 7) über, w. z. b. w.

(2. 6) und (2. 7) drücken aus, daß im metrischen Fall der Krümmungstensor verschwindet. Somit haben wir im wesentlichen den Satz von A. G. Walker (vgl. [5], Satz (3. 1)) durch eine neue Methode erhalten.

§ 3. Zerlegbarkeit der affinzusammenhängenden Räume von rekurrenter Krümmung.

In diesem Paragraphen sollen die Indizes $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ die Zahlen $1, 2, \ldots, r$ die Indizes $\varrho, \sigma, \tau, \omega$ aber die Zahlen $r+1, \ldots, n$, die lateinischen Indizes wie bisher die Zahlen $1, \ldots, n$ durchlaufen.

Definition. *Ein affinzusammenhängender Raum V_n heißt zerlegbar, wenn die Komponenten der Übertragungsparameter in einem geeigneten Koordinatensystem die Form*

$$L_\alpha{}^\beta{}_\gamma = L_\alpha{}^\beta{}_\gamma(x^1, \ldots, x^r), \quad L_\varrho{}^\sigma{}_\tau = L_\varrho{}^\sigma{}_\tau(x^{r+1}, \ldots, x^n) \tag{3. 1}$$

haben, und wenn die anderen, sogenannten gemischten, Komponenten identisch verschwinden.

Die gemischten Komponenten sind also diejenigen, unter deren Indizes sowohl die Zahlen $1, 2, \ldots, r$ als auch die Zahlen $r+1, \ldots, n$ vorkommen. Den Raum V_n betrachten wir dann als das Produkt eines r-dimensionalen und eines $n-r$-dimensionalen affinzusammenhängenden Raumes. Wir werden die Bezeichnung

$$V_n = V_r \times V_{n-r}$$

verwenden. Dabei nennen wir V_r und V_{n-r} die Komponentenräume von V_n.

Aus der Definition folgt unmittelbar, daß die gemischten Komponenten des durch (1. 5) definierten Torsionstensors $\Omega_i{}^j{}_k$ ebenfalls verschwinden. Dasselbe gilt auf Grund der Definitionsgleichung (1. 6) für die gemischten Komponenten des Krümmungstensors. Für die zerlegbaren Räume gilt:

Satz 4. *Ist ein n-dimensionaler Raum von rekurrenter Krümmung zerlegbar, so ist einer der Komponentenräume eben.*

(Für den metrischen Fall vgl. [5], § 2.)

Beweis. Ein affinzusammenhängender Raum von rekurrenter Krümmung ist durch

$$L_j{}^i{}_{kl}|_m = \varkappa_m L_j{}^i{}_{kl} \qquad (\varkappa_m \neq 0) \tag{3.2}$$

definiert, wo $\varkappa_m$ ein Vektorfeld bedeutet. Wählen wir jetzt in der Gleichung (1. 8) für die Indizes die Werte

$$i = \varrho,\ j = \sigma,\ k = \tau,\ l = \omega,\ m = \alpha$$

bzw.

$$i = \alpha,\ j = \beta,\ k = \gamma,\ l = \delta,\ m = \varrho,$$

so bekommen wir aus (1. 8)

$$\varkappa_\alpha L_\sigma{}^\varrho{}_{\tau\omega} = 0, \qquad \varkappa_\varrho L_\beta{}^\alpha{}_{\gamma\delta} = 0, \tag{3.3}$$

da die gemischten Komponenten des Krümmungstensors und des Torsionstensors verschwinden. Aus (3. 3) folgt bereits unser Satz 4. Denn weil $\varkappa_i$ nicht identisch verschwindet, ist einer der Krümmungstensoren $L_\sigma{}^\varrho{}_{\tau\omega}$ und $L_\beta{}^\alpha{}_{\gamma\delta}$ identisch Null, und das bedeutet, daß entweder V_{n-r} oder V_r eben ist.

Bemerkung. Ist der allgemeine affinzusammenhängende Raum V_n mit den Übertragungsparametern $L_i{}^j{}_k$ zerlegbar, so bestimmen nach (1. 4) auch die $\Gamma_i{}^j{}_k$ einen zerlegbaren Raum.

§ 4. Allgemeine metrische Punkträume von rekurrenter Krümmung.

A. G. Walker hat bewiesen, daß, falls in einem Riemannschen Raum $n-1$ linear-unabhängige parallele Vektorfelder existieren, der Krümmungstensor im Raume identisch verschwindet, d. h. der Raum eben ist (vgl. [5], Theorem (3. 1)). Wir werden im folgenden beweisen, daß dieser Satz auch dann gültig ist, wenn die Parallelität im Raume durch eine metrische Übertragung von der Form (1. 12), (1. 13) definiert ist. Es gilt:

Satz 5. *Existieren im Raume V_n mit den Übertragungsparametern* (1. 12) *$n-1$ linear-unabhängige parallele Vektorfelder, so ist der durch* (1. 14) *bestimmte Krümmungstensor des Raumes identisch Null.*

Beweis. Da nach unserer Annahme im Raume $n-1$ linear-unabhängige Vektorfelder existieren, hat das Differentialgleichungssystem

$$\lambda^i|_k \equiv \partial_k \lambda^i + L_r{}^i{}_k \lambda^r = 0 \tag{4.1}$$

$n-1$ linear-unabhängige Lösungen $\underset{(\alpha)}{\lambda^{*i}}$. (Die griechischen Indizes durchlaufen die Zahlen $1, 2, \ldots, n-1$.) $L_r{}^i{}_k$ ist durch (1. 12) und (1. 13) bestimmt. Da $L_r{}^i{}_k$ eine spezielle affine Übertragung ist, muß

$$\underset{(\alpha)}{\lambda^{*r}} \dot{R}_r{}^j{}_{kl} = 0 \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n-1) \tag{4.2}$$

gelten (vgl. [1], § 9).

Statt der $\underset{(\alpha)}{\lambda^{*i}}$ werden wir jetzt das aus den $\underset{(\alpha)}{\lambda^{*i}}$ nach dem bekannten sogenannten Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahren konstruierte orthonormierte System $\underset{(\alpha)}{\lambda^i}$ verwenden. Offenbar bestehen (4. 1) und (4. 2) für diese $\underset{(\alpha)}{\lambda^i}$. Ergänzen wir noch die Vektoren $\underset{(\alpha)}{\lambda^i}$ durch einen Vektor $\underset{(n)}{\lambda^i}$, der die Relationen

$$g_{ij} \underset{(\alpha)}{\lambda^i} \underset{(n)}{\lambda^j} = 0, \qquad g_{ij} \underset{(n)}{\lambda^i} \underset{(n)}{\lambda^j} = 1$$

befriedigt, zu einem n-dimensionalen orthonormierten n-Bein, so befriedigen die ersten $n-1$ Vektoren dieses n-Beins die Gleichungen (4. 1) und (4. 2).

Bilden wir jetzt die Beindarstellung des Krümmungstensors $\dot{R}_{ijkl}$ bezüglich $\underset{(r)}{\lambda^i}$, so wird

$$\dot{R}_{ijkl} = \underset{(abcd)}{R}\, \underset{(a)}{\lambda_i}\, \underset{(b)}{\lambda_j}\, \underset{(c)}{\lambda_k}\, \underset{(d)}{\lambda_l}. \tag{4. 3}$$

Wegen

$$\underset{(a)}{\lambda_i}\, \underset{(r)}{\lambda^i} = \delta_{ar} = \begin{Bmatrix} 1 \text{ für } a = r \\ 0 \text{ für } a \neq r \end{Bmatrix}$$

bekommt man aus (4. 3) nach einer Kontraktion für die Skalaren $\underset{(abcd)}{R}$ den Ausdruck:

$$\underset{(abcd)}{R} = \dot{R}_{ijkl}\, \underset{(a)}{\lambda^i}\, \underset{(b)}{\lambda^j}\, \underset{(c)}{\lambda^k}\, \underset{(d)}{\lambda^l}. \tag{4. 4}$$

Auf Grund von (4. 2) ist aber nach (4. 4)

$$\underset{(abcd)}{R} = 0 \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n-1). \tag{4. 5}$$

Wegen der Schiefsymmetrie von $\dot{R}_{ijkl}$ in (i, j), ist $\underset{(abcd)}{R}$ nach (4. 4) schiefsymmetrisch in (a, b). Nach (4. 5) ist somit

$$\underset{(bacd)}{R} = 0 \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n-1). \tag{4. 6}$$

Da wegen der Schiefsymmetrie $\underset{(nnab)}{R} = 0$ ist, folgt aus (4. 5) und (4. 6), daß

$$\underset{(abcd)}{R} = 0 \tag{4. 7}$$

ist. Aus (4. 3) und (4. 7) ergibt sich dann unser Satz.

Nehmen wir jetzt an, daß im Raume V_n bezüglich der Übertragung (1. 12a) $n-p$ parallele Vektorfelder $\underset{(\varrho)}{\lambda^i}$ $(\varrho = 1, 2, \ldots, n-p;\ p \geqq 2)$ existieren und daß der Tensor Λ_{ijk} die Form

$$\Lambda_{ijk} = 2\, \underset{(1)}{\mu_{[i}}\, \underset{(2)}{\mu_{j]}}\, \nu_k \tag{4. 8}$$

hat, wo $\underset{(1)}{\mu_i}$ *und* $\underset{(2)}{\mu_i}$ *zwei linear-unabhängige Vektoren bedeuten*, die zu $\underset{(\varrho)}{\lambda^i}$ orthogonal sind, und ν_k ein beliebiger Vektor ist. Da $\underset{(\varrho)}{\lambda^i}$ nach unserer Annahme $\underset{(\varrho)}{\lambda^i}{}_{,k} = 0$ befriedigt, folgt nach (4. 8) und (1. 12), daß auch $\underset{(\varrho)}{\lambda^i}|_k = 0$ gilt. Das beweist aber die Gültigkeit des folgenden Satzes:

Satz 6. *Die Formeln* (1. 12) *und* (4. 8) *bestimmen für die* $n-p$ *Vektorfelder, die bezüglich der* Γ*-Übertragung Parallelfelder sind, eine metrische Übertragung, welche diese Eigenschaft invariant läßt.* ($\Gamma_i{}^j{}_k$ bedeutet jetzt $\{{}_i{}^j{}_k\}$).

Aus (4. 8) und (1. 15) folgen noch die Relationen:

$$\underset{(\varrho)}{\lambda^i} S_i{}^j{}_{kl} = 0, \quad \underset{(\varrho)}{\lambda^i} R_i{}^j{}_{kl} = 0, \quad \underset{(\varrho)}{\lambda^i} \dot{R}_i{}^j{}_{kl} = 0. \tag{4. 9}$$

Wenn ϱ die Zahlen $1, 2, \ldots, n-2$ bedeuten kann, so folgt aus der Gleichung (4. 9), daß die Krümmungstensoren in bezug auf die ersten beiden Indizes dieselbe Struktur haben.

Wenn $\underset{(1)}{\mu_i}$ und $\underset{(2)}{\mu_i}$ orthonormiert sind, gilt z. B.

$$\dot{R}_{ijkl} = \dot{R}\underset{(1)}{\mu_{[i}}\underset{(2)}{\mu_{j]}}p_{kl},$$

wo p_{kl} ein schiefsymmetrischer Tensor sein muß, da $\dot{R}_{ijkl}$ in (i, j) und (k, l) schiefsymmetrisch ist.

Der metrische Grundtensor g_{ij} und die Übertragungsparameter (1. 12a) bestimmen eine Riemannsche Geometrie. Wenn wir die Übertragung im Raume statt mit den Übertragungsparametern (1. 12a) mit den durch den Tensor $\Lambda_i{}^j{}_k$ erweiterten Übertragungsparametern (1. 12) bestimmen, so bekommen wir eine Erweiterung der ursprünglichen Riemannschen Geometrie. Wir nehmen an, daß (1. 12a) einen K_n^*-Raum bestimmt (die Definition der K_n^*-Räume siehe in [3] oder [5]). Wir beweisen:

Satz 7. *Bestimmt* (1. 12a) *einen K_n^*-Raum* ($n > 2$), *so kann der Tensor Λ_{ijk} immer so bestimmt werden, daß*

$$S_{ijkl} \neq 0, \quad S_{ijkl,m} = 0$$

gilt, wo der Tensor S_{ijkl} durch (1. 15) *gegeben ist.*

Beweis. In einem *K_n^*-Raum mit $n > 2$* existiert immer ein paralleles Vektorfeld $r^i(x)$. Das haben A. G. Walker und H. S. Ruse bewiesen (vgl. [3] und [5]). Da $r^i{}_{,k} = 0$ ist, genügt

$$\Lambda_{ijk} = g_{k[i}r_{j]} \tag{4. 10}$$

den Bedingungen des Satzes 7. Nach (1. 15) wird nämlich

$$S_{ijkm} = g^{st}(g_{m[i}r_{s]}g_{k[t}r_{j]} - g_{k[i}r_{s]}g_{m[t}r_{j]}),$$

woraus wegen

$$r_{i,k} = 0, \quad g_{ij,k} = 0$$

unsere Behauptung folgt.

Satz 7 bedeutet, daß aus der Gültigkeit von (4. 10) nach (0. 1) und (1. 14) auch die Gültigkeit von

$$\dot{R}_i{}^j{}_{kl,m} = R_i{}^j{}_{kl,m} = \varkappa_m R_i{}^j{}_{kl}$$

folgt.

Im folgenden werden wir noch den zwei- und dreidimensionalen Fall näher untersuchen.

Ein zweidimensionaler Raum ist immer ein Raum von rekurrenter Krümmung. Die Krümmungstensoren haben nämlich, wie das am Ende von § 1 bewiesen wurde, dieselben schiefsymmetrischen Eigenschaften; daher können die Krümmungstensoren (1. 14) und (1. 15) in der Form

$$\dot{R}_{ijkl} = \dot{R}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl}, \quad S_{ijkl} = S\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl}, \quad R_{ijkl} = R\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} \tag{4. 11}$$

dargestellt werden, wo der ε_{ij}-Tensor durch

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = 0, \quad \varepsilon_{12} = -\varepsilon_{21} = \sqrt{g}, \quad g = \det|g_{ik}|$$

bestimmt ist. Ebenso wie im Riemannschen Fall (vgl. [5], S. 41) folgt wegen (4. 11) und (1. 11), daß die Krümmungstensoren Relationen der Form

$$\dot{R}_{ijkl}|_m = \varkappa_m \dot{R}_{ijkl}, \quad \dot{R}_{ijkl,m} = \varkappa_m \dot{R}_{ijkl}$$

befriedigen, wo

$$\varkappa_m = \partial_m \log|\dot{R}|$$

ist.

Zum Schluß wollen wir für den dreidimensionalen Fall den folgenden Satz beweisen:

Satz 8. *In einem K_3-Raum kann der Tensor Λ_{ijk} immer so bestimmt werden, daß der Krümmungstensor unverändert bleibt d. h.*

$$\dot{R}_{ijkl} = R_{ijkl} \tag{4.12}$$

gilt; dabei kann

$$\alpha)\ \Lambda_{ijk,m} \neq 0 \quad \textit{oder} \quad \beta)\ \Lambda_{ijk,m} = 0$$

sein.

Beweis. In einem K_3-Raum hat der Krümmungstensor die Form (vgl. [2] Gleichungen (4. 1) und (4. 3)):

$$R_{ijkl} = m_{ij} m_{kl}, \quad m_{(ij)} = 0,$$

wo

$$m_{ij,t} = \tfrac{1}{2} \varkappa_t m_{ij}, \quad \varkappa_t = \partial_t \varkappa \tag{4.13}$$

ist. Es sei nun entsprechend dem Fall α)

$$\Lambda_{ijk} = m_{ij,k}.$$

Offenbar ist $\Lambda_{ijk,m} \neq 0$. Nach (1. 15) und (4. 13) wird

$$S_{ijkl} = m_{ij} \varkappa_{[k,l]} + \tfrac{1}{2} (m_{ij} + m_i^t m_{tj}) \varkappa_{[k} \varkappa_{l]} = 0, \tag{4.14}$$

weil die durch (1. 12a) definierten Übertragungsparameter symmetrisch sind und $\varkappa_k$ nach der zweiten Gleichung von (4. 13) ein Gradientvektor ist. Aus (1. 14) und (4. 14) folgt aber die Gültigkeit der Formel (4. 12).

Im Falle β) soll der Tensor Λ_{ijk} gemäß

$$\Lambda_{ijk} = \tfrac{1}{2} r_{ij} r_k, \quad r_{ij} = e^{-\frac{1}{2}\varkappa} m_{ij}$$

gewählt werden, wo die Bedingung $r_{k,m} = 0$ besteht. Ein Vektorfeld $r_k(x)$, das dieser Bedingung genügt, existiert in den K_3-Räumen immer, worauf wir schon hingewiesen haben. Da auch $r_{ij,m} = 0$ ist, wie unmittelbar bestätigt werden kann, ist $\Lambda_{ijk,m} = 0$. Nach (1. 15) und (4. 13) folgt dann

$$S_{ijkl} = r_i^t r_{tj} r_{[l} r_{k]} = 0,$$

und das beweist wieder die Gültigkeit von (4. 12).

Schriftenverzeichnis.

[1] *L. P. Eisenhart*, Non-Riemannian Geometry. Amer. Math. Soc. Colloquium Publ. (VIII), New York 1927.

[2] *H. S. Ruse*, Three dimensional spaces of recurrent curvature. Proc. of the London Math. Soc. (2) **50** (1949), 438–446.

[3] *H. S. Ruse*, A classification of K^*-spaces. Proc. of the London Math. Soc. (2) **53** (1951), 212–229.

[4] *L. A. Schouten*, Ricci Calculus (second edition), Springer Verlag, Berlin 1954.

[5] *A. G. Walker*, On Ruse's spaces of recurrent curvature. Proc. of the London Math. Soc. (2) **52** (1951), 36–64.

[6] *P. Nalli*, Trasporti rigidi di vettori negli spazi di Riemann. Atti Accad. naz. Lincei (VI) **13** (1931), 669–675.

Eingegangen 30. April 1957.

Quasigroupes automorphes par le groupe linéaire et géométrie finie.

Par *Albert Sade* à Marseille.

I. Généralités.

1. Introduction. Un quasigroupe d'ordre n est automorphe par le *groupe cyclique* s'il est isomorphe au groupoïde G, défini sur l'anneau Z/n des classes résiduelles (mod. n) par une loi de composition $(\times)$ satisfaisant à la condition:

$$x \times y = z \rightleftarrows (x + h) \times (y + h) = z + h \qquad (\text{mod. } n)$$

pour tous $x, y, z, h \in G$ [7, N° 1].

Un quasigroupe d'ordre n est automorphe par le *groupe géométrique* s'il est isomorphe au groupoïde $G'(*)$, défini sur Z/n et satisfaisant à la condition:

$$x * y = z \rightleftarrows (xm) * (ym) = zm \qquad (\text{mod. } n)$$

pour tous $x, y, z, m \in G'$ et $(m, n) = 1$ [8, N° 3].

Dans les seconds membres l'addition $(x + h)$ et la multiplication (mx) ont leur signification usuelle (mod. n) sur l'anneau Z/n des restes $0, 1, 2, \ldots, n - 1$.

Dans ce papier on se propose d'étudier et d'interpréter géométriquement les quasigroupes qui sont isomorphes d'une part à G, d'autre part à G'. On est ainsi conduit à s'occuper des quasigroupes $Q(\times)$, d'ordre n, définis sur Z/n, et qui satisfont à la relation:

$$x \times y = z \rightleftarrows (mx + h) \times (my + h) = mz + h \qquad (\text{mod. } n)$$

où m est premier avec n.

L'ensemble des substitutions linéaires $(x \to xm + h)$ (mod. n) est un groupe L_n, que l'on peut appeler le *groupe linéaire de* Z/n, de sorte que l'on peut caractériser les quasigroupes en question en disant qu'ils sont automorphes par le *groupe linéaire* (de cet anneau).

Définition. *Le quasigroupe $Q(\times)$, défini sur l'anneau Z/n, est automorphe par le groupe linéaire de cet anneau, L_n, si, pour tous $x, y, z, h \in Z/n$ et m premier avec n, on a:*

$$x \times y = z \rightleftarrows (mx + h) \times (my + h) = mz + h \qquad (\text{mod. } n).$$

On rappelle enfin qu'un quasigroupe *ordinaire* est un groupoïde satisfaisant aux lois d'existence et d'unicité du produit et du quotient, tandis qu'un quasigroupe *incomplet* satisfait seulement à la loi du produit et à celle du quotient unique ($ax = b$ et $ya = b$ ont chacune *au plus* une solution) c'est-à-dire à la loi de cancellation, certains éléments de l'ensemble produit $Q \times Q$ pouvant ne pas être définis.

Il existe des quasigroupes d'ordre pair automorphes par le groupe linéaire. Par exemple le quasigroupe du 6ème ordre automorphe par le groupe cyclique, défini [7, N° 4]

par sa translation à droite $(x \to x \times 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 5 & — & — & — & 1 \end{pmatrix}$ est automorphe par le groupe linéaire $(x \to mx + h)$, $m = 1, 5$, $h = 0, 1, \ldots, 5$. Mais de tels quasigroupes sont nécessairement incomplets. Bornons nous aux quasigroupes ordinaires, et par conséquent [7, N° 8] d'ordre impair.

2. Remarque. *Si un quasigroupe $Q(\times)$ est automorphe par le groupe linéaire, le conjoint $(\cdot)$ de Jordan,*

$$x \times y = z \rightleftarrows y \cdot x = z,$$

le réciproque $(*)$

$$x \times y = z \rightleftarrows z * y = x,$$

et en général les six quasigroupes parastrophiques [10] *sont encore automorphes par le groupe linéaire.*

Preuve. Si Q est automorphe par le groupe linéaire, on a:

$$x \times y = z \rightleftarrows (mx + h) \times (my + h) = mz + h \qquad (\text{mod. } n), \qquad (m, n) = 1.$$

Donc, dans le conjoint:

$$y \cdot x = z \rightleftarrows (my + h) \cdot (mx + h) = mz + h,$$

et dans le réciproque:

$$z * y = x \rightleftarrows (mz + h) * (my + h) = mx + h,$$

donc $(x \to mx + h)$ est un automorphisme du conjoint et du réciproque, donc aussi de tous les quasigroupes parastrophiques, puisque les six parastrophies forment un groupe qui est engendré par les deux précédentes.

3. Théorème. *Tout quasigroupe ordinaire $Q(\times)$, d'ordre n (impair, N° 1) automorphe par le groupe linéaire L_n, a pour loi de composition:*

$$x \times y = (x - y)\ g(d) + y \qquad (\text{mod. } n),$$

où $d = (x - y, n)$ et où g est une fonction arbitraire de d, définie sur l'ensemble des diviseurs de n, prenant ses valeurs dans Z/n et telle que $(g, n) = (g - 1, n) = 1$.

Preuve. D'après [8, N° 8] (qui est valable quelle que soit la parité de a, a' si n est impair), quand:

$$a \times a' = a'',\ (a, n) = d,\ (a', n) = d',\ (a'', n) = d'',$$

on a:

$$(d, d') = (d', d'') = (d'', d).$$

Faisons $a' = 0$; alors $d' = (a', n) = n$ et

$$(d, d') = d, \quad (d'', d') = d'',$$

d'où

$$d = d''.$$

Or un quasigroupe Q, automorphe par le groupe cyclique, est entièrement déterminé [7, N° 4] par la fonction

$$f(x) = x \times 0,$$

définie sur Z/n et assujettie aux deux conditions [7, N° 6]:

(i) $\quad f(x) = f(y) \rightleftarrows x = y \qquad (\text{mod. } n),$

(ii) $\quad x - f(x) = y - f(y) \rightleftarrows x = y \qquad (\text{mod. } n).$

Sa loi de composition est alors $Q(\times)$:

$$x \times y = f(x - y) + y.$$

D'après ce qui précède, les nombres $x = a$ et $f(x) = a''$ ont, avec n, le même PGCD, $(d = d'')$:

$$(x, n) = (f(x), n) = d.$$

Donc si $d \times 0 = f(d)$, le nombre $f(d)$ sera un multiple de d. On peut poser:

$$d \times 0 = d g(d).$$

Tout nombre, x, ayant avec n un PGCD égal à d est le produit de d par un nombre premier avec $\frac{n}{d}$. Mais, d'après le lemme [8, N° 6], on obtient tous les nombres (mod. n) premiers avec $\frac{n}{d}$ — et même $\frac{\varphi(n)}{\varphi\left(\frac{n}{d}\right)}$ fois chacun — en prenant les $\varphi(n)$ nombres premiers avec n. On peut donc représenter tout nombre x, tel que $(n, x) = d$, par dm avec la condition $(m, n) = 1$.

Comme le quasigroupe Q est automorphe par le groupe géométrique:

$$d \times 0 = d\, g(d) \rightleftarrows dm \times 0 = dm\, g(d) \qquad (\text{mod. } n),$$

ou enfin:

$$x \times 0 = x\, g(d) \qquad (\text{mod. } n),$$

et:

$$x \times y = (x - y)\, g(d) + y \qquad (\text{mod. } n),$$

où $g(d)$ est une fonction quelconque de d, prenant ses valeurs dans Z/n et assujettie à la seule condition:

$$x\, g(d) = y\, g(d) \rightleftarrows x = y \qquad (\text{mod. } n),$$

$$x - x\, g(d) = y - y\, g(d) \rightleftarrows x = y \qquad (\text{mod. } n),$$

ou encore:

$$0 = (x - y)\, g \rightleftarrows x - y = 0 \qquad (\text{mod. } n),$$

$$0 = (x - y)(1 - g) \rightleftarrows x - y = 0 \qquad (\text{mod. } n).$$

Exemple. En prenant g constant, on obtient le quasigroupe $Q(\times)$:

$$x \times y = gx + (1 - g)\, y \qquad (\text{mod. } n),$$

ce qui est un cas particulier de $x \times y = ax + by$, (a et b premiers avec n), [8, N° 13, exemple A]. Q est „endo" et autodistributif [1], car:

$$\begin{aligned}
(x \times y) \times z &= g[gx + (1 - g)\, y] + (1 - g)\, z && (\text{mod. } n),\\
&= g^2 x + g(1 - g)\, y + (1 - g)\, z && (\text{mod. } n),\\
(x \times z) \times (y \times z) &= g[gx + (1 - g)\, z] + (1 - g)\,[gy + (1 - g)\, z] && (\text{mod. } n),\\
&= g^2 x + g(1 - g)\, y + (1 - g)(g + 1 - g)\, z && (\text{mod. } n).
\end{aligned}$$

Q est aussi „medial" [11, p. 546], c'est-à-dire qu'il obéit à la loi d'entropie de Murdoch-Etherington [5, p. 516 et 2, p. 444], comme cela résulte du théorème de Knaster [3] et comme on le vérifie immédiatement.

Pour déterminer le nombre des quasigroupes d'ordre n automorphes par le groupe linéaire on est conduit à énumérer les valeurs de g.

4. Lemme. *Il y a*

$$P(n) = n\,\frac{(p-2)\,(q-2)\,(r-2)\cdots}{pqr\cdots}$$

nombres naturels, u, non supérieurs à $n = p^A q^B r^C \cdots$, *et tels que u et* $u-1$ *soient premiers avec n, où* $p, q, r, \ldots$ *sont les diviseurs premiers inégaux de n.*

Preuve. La démonstration est identique à celle de l'expresssion de l'indicateur. On prouve d'abord que P est fortement multiplicative, c'est-à-dire que si $n = ab$, a et b étant premiers entre eux, on aura $P(ab) = P(a)\,P(b)$.

Soit x un nombre inférieur à b. Si x est tel que x et $x-1$ soient premiers avec b, il en sera de même de chacun des nombres $x + bt$, $(t = 0, 1, 2, \ldots, a-1)$. Au contraire, si x n'est pas premier avec b, aucun des nombres $x + bt$ ne le sera. Si $x-1$ n'est pas premier avec b, aucun des nombres $x + bt - 1$ ne le sera. Si donc on définit deux partitions sur l'ensemble $1, 2, 3, \ldots, n = ab$, au moyen de deux équivalences commutables, [6, p. 590]:

$$\text{(E)} \qquad X \equiv Y \text{ si } X - Y \equiv 0 \quad (\text{mod. } b),$$

$$\text{(E}'\text{)} \qquad X \equiv Y \text{ si } \left\lfloor \frac{X-1}{b} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{Y-1}{b} \right\rfloor,$$

où $\left\lfloor \frac{p}{q} \right\rfloor$ indique le quotient entier de p par q, il existera $P(b)$ classes par rapport à (E) dont tous les termes, X, seront tels que X et $X-1$ soient premiers avec b.

Si l'on considère une quelconque de ces classes, elle contient, (mod. a), tous les nombres $0, 1, 2, \ldots, a-1$, une fois chacun. Il y a donc dans cette classe $P(a)$ termes X tels que X et $X-1$ soient premiers avec a. Donc, dans les $P(b)$ classes (E) il y a $P(a)\,P(b)$ termes X tels que X et $X-1$ soient premiers avec a et b, d'où:

$$P(ab) = P(a)\,P(b).$$

On en déduit, si $p, q, r, \ldots$ sont premiers inégaux,

$$P(p^A q^B r^C \cdots) = P(p^A)\,P(q^B)\,P(r^C)\cdots.$$

Or, si n est un nombre premier p, $P(p)$ est évidenment égal à $p-2$, les valeurs de X étant $2, 3, 4, \ldots, p-1$.

Si $n = p^A$, les valeurs de X sont $2, 3, 4, \ldots, p-1,\ p+2,\ p+3, \ldots, 2p-1,\ 2p+2, \ldots, pt-1,\ pt+2, \ldots, p^A-1$, c'est-à-dire tous les nombres de 1 à p^A, sauf 1, p et $p+1$, $2p$ et $2p+1, \ldots, tp$ et $tp+1, \ldots$, enfin p^A. Le nombre des termes à déduire est ainsi $2p^{A-1}$, d'où:

$$P(p^A) = p^A - 2p^{A-1} = n\,\frac{p-2}{p}$$

et enfin:

$$P(n) = n\,\frac{(p-2)\,(q-2)\,(r-2)\cdots}{pqr\cdots}.$$

Ce résultat peut être déduit du théorème suivant, énoncé sans démonstration par LeVeque [4, Vol I, p. 31]: „Soit $f(x)$ un polynome à coefficients entiers et soit $P(n)$ le nombre des valeurs $f(0), f(1), \ldots, f(n-1)$ qui sont premières avec n, alors on a:

$$P(mn) = P(m)\,P(n) \text{ si } (m, n) = 1.\text{“}$$

Ce renseignement m'a été aimablement communiqué par M. J. Touchard, qui en a dérivé la relation remarquable:

$$\sum P(d)\, A\left(\frac{n}{d}\right) = n$$

où d décrit les diviseurs de n. La fonction A est définie par $A(x) = 2^{B(x)}$ où $B(x)$ est le nombre des facteurs premiers de x, distincts ou non. On doit poser conventionnellement $P(1) = 1$.

5. Application. *Le nombre des quasigroupes d'ordre n, automorphes par le groupe linéaire est $N = \prod P\left(\frac{n}{d}\right)$ où d parcourt tous les diviseurs propres de n, y compris l'unité. Si $n = p^A$,*

$$N = p^{\frac{A(A-1)}{2}} (p-2)^A.$$

Si $n = p^A$,

$$N = \prod_{r=0}^{A-1} p^{A-1-r}(p-2),$$

d'où:

$$N = \prod_{r=0}^{A-1} p^r(p-2) = p^{\frac{A(A-1)}{2}} (p-2)^A.$$

6. Théorème. (i) *Les seules substitutions du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ qui transforment le groupe linéaire L_n en lui-même sont précisément celles de L_n et définissent le groupe des automorphismes intérieurs de L_n.*

(ii) *Si Q est un quasigroupe sur Z/n, ayant pour automorphe L_n, aucun quasigroupe isomorphe à Q (et distinct de Q) n'est automorphe par L_n.*

(iii) *Le nombre des quasigroupes distincts, isomorphes à Q est* $\dfrac{(n-1)!}{\varphi(n)}$.

Preuve. (i) Soit L_n le groupe des substitutions linéaires de Z/n et $\mathfrak{S}_n$ le groupe symétrique des n lettres $0, 1, 2, \ldots, n-1$. Soit $S \in \mathfrak{S}_n$. Le transformé de L_n par S est $S^{-1} L_n S$; supposons qu'il coïncide avec L_n. Le groupe L_n contient la substitution circulaire $C = (0, 1, 2, 3, 4, \ldots, n-1)$, et les puissances de longueur n de C:

$$C^m = (x \to x + m) \qquad (m, n) = 1.$$

Ces $\varphi(n)$ substitutions sont les seules qui soient circulaires et d'ordre n dans L_n car, si $(x \to px + q)$ est un élément de L_n, $p \neq 1$, cette substitution sera composée de cycles d'ordre k comme $\left(x,\ px + q,\ p^2x + pq + q, \ldots, p^kx + \dfrac{p^k - 1}{p-1}\, q\right)$ avec la condition $p^kx + \dfrac{(p^k-1)\,q}{p-1} = x$, où k est l'exposant auquel appartient p (mod. n): $p^k \equiv 1$ (mod. n). Comme cet exposant est un diviseur de $\varphi(n)$, ces cycles ne peuvent avoir pour longueur n.

Cela posé, pour que S transforme L_n en lui-même il faut (règle de Cauchy), [Exercices de phys. Math. III, Paris 1844, p. 177] que S transforme les unes dans les autres les $\varphi(n)$ puissances de C qui sont des cycles de n lettres. Or toute permutation circulaire de

$$0, m, 2m, 3m, \ldots, (n-1)\, m,$$

est

$$km, (k+1)\, m, (k+2)\, m, \ldots, (k-1)\, m,$$

d'où:

$$S = \begin{pmatrix} 0 & , 1 & , 2 & , \ldots, x & , \ldots, n-1 \\ km, & (k+1)\,m, & (k+2)\,m, \ldots, & (k+x)\,m, \ldots, & (k-1)\,m \end{pmatrix}$$

$$S = (x \to mx + b),$$

et comme m est premier avec n, $S \in L_n$.

(ii) Maintenant, si Q est un quasigroupe défini sur Z/n et si l'automorphe de Q coïncide avec L_n, tout quasigroupe Q', isomorphe à Q, $Q' = QT$, $T \in \mathfrak{S}_n$, coïncidera avec Q si $T \in L_n$. Si au contraire $T \notin L_n$, le groupe d'automorphisme de Q' sera le transformé par T de celui de Q, soit $T^{-1} L_n T$; il sera donc différent de L_n d'après (i) et Q' ne sera pas automorphe par le groupe linéaire de Z/n.

(iii) Ce dernier étant d'ordre $n\varphi(n)$, si l'on soumet Q aux $n!$ isomorphismes du groupe symétrique, on obtiendra seulement $\dfrac{n!}{n\varphi(n)} = \dfrac{(n-1)!}{\varphi(n)}$ quasigroupes distincts.

7. Théorème. *Si $Q(\times)$ est un quasigroupe d'ordre n, automorphe par le groupe linéaire de Z/n,*

(i) *le complexe*

$$R_0 = (0, d, 2d, 3d, \ldots, n-d) \qquad \text{où } d \mid n,$$

est un sous-quasigroupe de Q,

(ii) *les d complexes*

$$R_i = (i, d+i, 2d+i, \ldots, n-d+i), (\text{mod. } n) \qquad \text{où } i = 0, 1, 2, \ldots, d-1,$$

sont des diviseurs disjoints de Q;

(iii) *le diviseur R_0 est automorphe par les substitutions $(x \to mx)$, $(m, n) = 1$;*

(iv) *l'ensemble*

$$G = \left(0, 1, 2, \ldots, \frac{n}{d} - 1\right)$$

sur lequel on définit la loi de composition $(*)$ par $x * y = z$ si, dans Q, $dx \times dy = dz$, est un quasigroupe automorphe par les substitutions $(x \to x + h)$, $\left(\text{mod. } \dfrac{n}{d}\right)$ et $(x \to mx)$ où m est premier avec n.

Preuve. Les parties (i) et (iii) résultent de [8, N° 9]; la partie (ii) résulte de [7, N° 22].

(iv). Le complexe G est visiblement fermé par rapport à sa loi de composition, et il obéit à la loi de cancellation; c'est donc un quasigroupe. En outre il est automorphe par le groupe des substitutions $(x \to x + h)$, $\left(\text{mod. } \dfrac{n}{d}\right)$ car, par hypothèse:

$$(kd + d) \times (k'd + d) = (k''d + d) \qquad (\text{mod. } n),$$

c'est-à-dire:

$$[(k+1)\,d] \times [(k'+1)\,d] = (k''+1)\,d \qquad (\text{mod. } n),$$

donc:

$$(k+1) * (k'+1) = k''+1 \qquad \left(\text{mod. } \frac{n}{d}\right).$$

G est également automorphe par les transformations:

$$(x \to xm), \quad (m, n) = 1,$$

Ce renseignement m'a été aimablement communiqué par M. J. Touchard, qui en a dérivé la relation remarquable:

$$\Sigma\, P(d)\, A\left(\frac{n}{d}\right) = n$$

où d décrit les diviseurs de n. La fonction A est définie par $A(x) = 2^{B(x)}$ où $B(x)$ est le nombre des facteurs premiers de x, distincts ou non. On doit poser conventionnellement $P(1) = 1$.

5. Application. *Le nombre des quasigroupes d'ordre n, automorphes par le groupe linéaire est $N = \Pi\, P\left(\frac{n}{d}\right)$ où d parcourt tous les diviseurs propres de n, y compris l'unité. Si $n = p^A$,*

$$N = p^{\frac{A(A-1)}{2}}\,(p-2)^A.$$

Si $n = p^A$,

$$N = \prod_{r=0}^{A-1} p^{A-1-r}(p-2),$$

d'où:

$$N = \prod_{r=0}^{A-1} p^r(p-2) = p^{\frac{A(A-1)}{2}}\,(p-2)^A.$$

6. Théorème. (i) *Les seules substitutions du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ qui transforment le groupe linéaire L_n en lui-même sont précisément celles de L_n et définissent le groupe des automorphismes intérieurs de L_n.*

(ii) *Si Q est un quasigroupe sur $\mathbf{Z}/n$, ayant pour automorphe L_n, aucun quasigroupe isomorphe à Q (et distinct de Q) n'est automorphe par L_n.*

(iii) *Le nombre des quasigroupes distincts, isomorphes à Q est* $\dfrac{(n-1)!}{\varphi(n)}$.

Preuve. (i) Soit L_n le groupe des substitutions linéaires de $\mathbf{Z}/n$ et $\mathfrak{S}_n$ le groupe symétrique des n lettres $0, 1, 2, \ldots, n-1$. Soit $S \in \mathfrak{S}_n$. Le transformé de L_n par S est $S^{-1} L_n S$; supposons qu'il coïncide avec L_n. Le groupe L_n contient la substitution circulaire $C = (0, 1, 2, 3, 4, \ldots, n-1)$, et les puissances de longueur n de C:

$$C^m = (x \to x + m) \qquad (m, n) = 1.$$

Ces $\varphi(n)$ substitutions sont les seules qui soient circulaires et d'ordre n dans L_n car, si $(x \to px + q)$ est un élément de L_n, $p \neq 1$, cette substitution sera composée de cycles d'ordre k comme $\left(x,\ px + q,\ p^2x + pq + q, \ldots, p^k x + \dfrac{p^k - 1}{p-1}\, q\right)$ avec la condition $p^k x + \dfrac{(p^k - 1)\, q}{p-1} = x$, où k est l'exposant auquel appartient p (mod. n): $p^k = 1$ (mod. n). Comme cet exposant est un diviseur de $\varphi(n)$, ces cycles ne peuvent avoir pour longueur n.

Cela posé, pour que S transforme L_n en lui-même il faut (règle de Cauchy), [Exercices de phys. Math. III, Paris 1844, p. 177] que S transforme les unes dans les autres les $\varphi(n)$ puissances de C qui sont des cycles de n lettres. Or toute permutation circulaire de

$$0, m, 2m, 3m, \ldots, (n-1)\, m,$$

est

$$km, (k+1)\, m, (k+2)\, m, \ldots, (k-1)\, m,$$

d'où:

$$S = \begin{pmatrix} 0, & 1, & 2, & \ldots, x, & \ldots, n-1 \\ km, & (k+1)\,m, & (k+2)\,m, & \ldots, (k+x)\,m, & \ldots, (k-1)\,m \end{pmatrix}$$

$$S = (x \to mx + b),$$

et comme m est premier avec n, $S \in L_n$.

(ii) Maintenant, si Q est un quasigroupe défini sur Z/n et si l'automorphe de Q coïncide avec L_n, tout quasigroupe Q', isomorphe à Q, $Q' = QT$, $T \in \mathfrak{S}_n$, coïncidera avec Q si $T \in L_n$. Si au contraire $T \notin L_n$, le groupe d'automorphisme de Q' sera le transformé par T de celui de Q, soit $T^{-1} L_n T$; il sera donc différent de L_n d'après (i) et Q' ne sera pas automorphe par le groupe linéaire de Z/n.

(iii) Ce dernier étant d'ordre $n\varphi(n)$, si l'on soumet Q aux $n!$ isomorphismes du groupe symétrique, on obtiendra seulement $\dfrac{n!}{n\varphi(n)} = \dfrac{(n-1)!}{\varphi(n)}$ quasigroupes distincts.

7. Théorème. *Si $Q(\times)$ est un quasigroupe d'ordre n, automorphe par le groupe linéaire de Z/n,*

(i) *le complexe*

$$R_0 = (0, d, 2d, 3d, \ldots, n-d) \qquad \text{où } d \mid n,$$

est un sous-quasigroupe de Q,

(ii) *les d complexes*

$$R_i = (i, d+i, 2d+i, \ldots, n-d+i), (\text{mod. } n) \qquad \text{où } i = 0, 1, 2, \ldots, d-1,$$

sont des diviseurs disjoints de Q;

(iii) *le diviseur R_0 est automorphe par les substitutions $(x \to mx)$, $(m, n) = 1$;*

(iv) *l'ensemble*

$$G = \left(0, 1, 2, \ldots, \frac{n}{d} - 1\right)$$

sur lequel on définit la loi de composition $(*)$ par $x * y = z$ si, dans Q, $dx \times dy = dz$, est un quasigroupe automorphe par les substitutions $(x \to x + h)$, $\left(\text{mod. } \dfrac{n}{d}\right)$ et $(x \to mx)$ où m est premier avec n.

Preuve. Les parties (i) et (iii) résultent de [8, N° 9]; la partie (ii) résulte de [7, N° 22].

(iv). Le complexe G est visiblement fermé par rapport à sa loi de composition, et il obéit à la loi de cancellation; c'est donc un quasigroupe. En outre il est automorphe par le groupe des substitutions $(x \to x + h)$, $\left(\text{mod. } \dfrac{n}{d}\right)$ car, par hypothèse:

$$(kd + d) \times (k'd + d) = (k''d + d) \qquad (\text{mod. } n),$$

c'est-à-dire:

$$[(k+1)\,d] \times [(k'+1)\,d] = (k''+1)\,d \qquad (\text{mod. } n),$$

donc:

$$(k+1) * (k'+1) = k''+1 \qquad \left(\text{mod. } \frac{n}{d}\right).$$

G est également automorphe par les transformations:

$$(x \to xm), \quad (m, n) = 1,$$

car, par hypothèse,

$$kd \times k'd = k''d \rightarrow mkd \times mk'd = mk''d \quad (\text{mod. } n),$$

donc:

$$km \times k'm = k''m \qquad \left(\text{mod. } \frac{n}{d}\right).$$

8. Diviseur normal. *Pour que le diviseur* $R = (0, d, 2d, \ldots, n-d)$ *d'un quasigroupe* $Q(\times)$, *automorphe par le groupe linéaire de* $\mathbf{Z}/n$:

$$x \times y = g(D)(x - y) + y \qquad (\text{mod. } n)$$

soit normal il faut et il suffit que, pour chaque système fixé de valeurs de $a - b$, *et lorsque* $m - p = \left[\frac{x}{d}\right] - \left[\frac{y}{d}\right]$ *parcourt toutes les valeurs* $0, 1, 2, \ldots, \frac{n}{d} - 1$, *la valeur choisie pour* $g(D)$ *soit la même pour les diverses valeurs que prend alors le PGCD,*

$$D = (a - b + md - pd,\ n).$$

Preuve. On rappelle que $R \subseteq Q$ est diviseur normal du quasigroupe fini Q si R est un bloc fermé dans une partition régulière de Q.

Pour que $R = (0, d, 2d, \ldots, n-d)$ soit diviseur normal de Q il faut et il suffit que, si $0 \leqq a,\ b < d$ et $0 \leqq p,\ m < \frac{n}{d}$, on ait:

$$(a + md) \times (b + pd) = c + qd \qquad (\text{mod. } n)$$

avec:

$$0 \leqq c < d,\ \ 0 \leqq q < \frac{n}{d},\ \ c \text{ indépendent de } p \text{ et de } m.$$

Or:

$$\begin{aligned}(a + md) \times (b + pd) &= g(D)\,(a + md - b - pd) + b + pd \\ &= c + qd\end{aligned}$$

où

$$c = g(D)\ (a - b) + b \qquad (\text{mod. } n).$$

Dans cette expression, g ne dépend que du PGCD, $(a + md - b - pd, n) = D$. Il est évident que c sera indépendant de p et de m si $a = b$, car alors $b = c$; ce cas est sans intérêt puisque l'on sait déjà que $(d + b, 2d + b, 3d + b, \ldots)$ est un diviseur de Q. Pour que R soit diviseur normal il sera nécessaire et suffisant que, pour toutes les valeurs que peut prendre $(a - b + md - pd, n)$ quand a et b ayant des valeurs fixées, m et p varient de toutes les manières possibles, la valeur choisie pour $g(D)$ reste la même. Autrement dit, quand $m - p$ parcourt toutes les valeurs $0, 1, 2, \ldots, \frac{n}{d} - 1$, la fonction $g(D)$ doit rester constante. En particulier si $m = p = 0$, d'où: $c = a \times b$.

Exemple. $n = 245$; $d = 7$; $a, b < 7$; $m, p < 35$;

$$a - b = 1, 2, 3, 4, 5, 6; \quad m - p = 0, 1, 2, \ldots, 34.$$

La quantité $a - b + 7(m - p)$ ne peut être divisible par 7 puisque $a - b$ est compris entre 0 et 7. Donc le PGCD de $a - b + 7(m - p)$ et de n ne peut être que 1 ou 5, quels que soient $a \neq b$, m, p. Si donc, avec la notation $x \times 0 = f(x) = g(d)\,x$, on choisit $f(1) = \frac{f(5)}{5}$, puis $f(7)$, $f(35)$ et $f(49)$ arbitrairement, alors $(0, 7, 14, \ldots 238)$ sera un diviseur normal.

9. Corollaire. *Si d est un facteur premier de n, pour que l'ensemble $(0, d, 2d, \ldots, n-d)$ soit diviseur normal de $Q(\times)$, quasigroupe d'ordre n automorphe par le groupe linéaire de Z/n, il faut et il suffit que:*

$$\frac{f(d')}{d'} = \frac{f(d'')}{d''} = \frac{f(d''')}{d'''} = \cdots = \text{Constante},$$

$d', d'', d''' \cdots$ étant les diviseurs de n, premiers avec d, y compris l'unité.

Preuve. Si d est premier, comme $a-b$ est plus petit que d, la somme $a-b+(m-p)d$, avec $a \neq b$, ne pourra jamais être divisible par d. Donc le PGCD de n et de $a-b+(m-p)d$ sera premier avec d; d'où la condition énoncée.

Exemple. $\quad n = 15, \; f(1) = \dfrac{f(5)}{5} = 2, \; \dfrac{f(3)}{3} = 4, \; d = 3.$

Q est défini par $f(x) : (x \to x \times 0) = (0)\ (1, 2, 4, 8)\ (3, 12)\ (5, 10)\ (6, 9)\ (7, 14, 13, 11)$. Le sous-quasigroupe $(0, 3, 6, 9, 12)$ est diviseur normal. Mais, pour $d = 5$, le sous-quasigroupe $(0, 5, 10)$ n'est pas normal puisque $f(1) \neq \dfrac{f(3)}{3}$. Si l'on divise par 3 les éléments du diviseur normal, on trouve le quasigroupe $(0, 1, 2, 3, 4)$ défini par $f(x) = (0)\ (14)\ (23)$, qui est automorphe par le groupe linéaire de $Z/5$. Le quasigroupe quotient est le quasigroupe idempotent du $3^{\text{ème}}$ ordre.

10. Quasigroupe quotient. *Si*

$$R = (0, d, 2d, \ldots, n-d)$$

est diviseur normal du quasigroupe $Q(\times)$ d'ordre n, automorphe par le groupe linéaire $(x \to mx + h)$ de Z/n,

(i) *chaque coset*

$$R_t = (t, t+d, t+2d, \ldots, t+n-d)$$

est encore diviseur normal;

(ii) *les valeurs de t forment un système de représentants et le quasigroupe quotient Q/R, constitué par les éléments t, a même loi de composition que Q,* (mod. d).

Preuve. (i) Soit d un diviseur de n tel que $R = (0, d, 2d, \ldots, n-d)$ soit un diviseur normal dans Q. Comme Q est automorphe par $T = (x \to x + t)$, il en résulte que R_t, qui est l'image de R par T, est encore diviseur normal.

(ii) On a vu plus haut que:

$$(md + a) \times (pd + b) = qd + c \qquad (\text{mod. } n)$$

avec $c = a \times b$ (mod. d); désignons le coset $R_t = (t, t+d, t+2d, t+3d, \ldots, t+n-d)$ par la valeur correspondante de t. Puisque $a \times b = c$ (mod. d), le quasigroupe quotient Q/R est défini par la même loi de composition que Q, le produit étant calculé, modulo d.

Dans l'exemple du N° 8, $n = 245 = 5 \cdot 7^2$, faisons:

$$a \times b = 2(a-b) + b \quad \text{si } (a-b, 7) = 1,$$
$$a \times b = 3(a-b) + b \quad \text{si } (a-b, 7) = 7,$$

donc

$$\frac{f(1)}{1} = \frac{f(5)}{5} = 2.$$

Le diviseur $R = (0, 7, 14, \ldots, 238)$ est normal ainsi que tous les diviseurs $R_t = (t, 7 + t, 14 + t, \ldots 238 + t)$, $t = 0, 1, 2, \ldots, 6$. On a:

$$\begin{aligned}(7m + a) \times (7p + b) &= 14(m - p) + 2(a - b) + 7p + b \\ &= 7[2(m - p) + p] + 2(a - b) + b \\ &= 7q + a \times b,\end{aligned}$$

car $a - b < 7$.

Le quasigroupe quotient est défini par la loi de composition:

$$a * b = 2(a - b) + b \qquad (\text{mod. } 7)$$

qui est précisément la même, modulo 7, que celle de Q.

11. Cas Particulier. (i) *Le quasigroupe* $Q(\times)$:

$$x \times y = ax + (1 - a)\, y \qquad (\text{mod. } n),$$

où

$$(a, n) = (a - 1, n) = 1, \quad a = \text{const},$$

est engendré par les éléments 0 *et* 1: $Q = \{0, 1\}$;

(ii) *tout endomorphisme de* Q *est de la forme* $(x \to mx + h)$;

(iii) *son automorphe coïncide avec le groupe linéaire de* Z/n;

(iv) *dans tout ce qui suit ce quasigroupe particulier sera noté* QL. [7, N° 13, p. 324].

Preuve. (i) Soit $R = \{0, 1\} \subseteq Q$. On a, pour tout $x \in R, x \times 0 = ax$ et $0 \times x = (1 - a)\, x$; donc R contient, en même temps qu'un élément x, ses produits (usuels dans Z/n) par toute puissance de a et de $1 - a$. Si $a^r = 1$ et $(1 - a)^p = 1$ (mod. n), soient x et $y \in R$. Alors $a^{r-1} x \in R$ et $(1 - a)^{p-1} y \in R$; le produit $(\times)$ dans Q de ces deux éléments est:

$$(a^{r-1} x) \times [(1 - a)^{p-1} y] = a^r x + (1 - a)^p y = x + y \qquad (\text{mod. } n).$$

Donc R contient, en même temps que deux éléments, leur somme. D'ailleurs $a \neq 1$, car sinon $a - 1$ ne serait pas premier avec n. Comme R contient 1 et $a \neq 1$, il contient $a + 1$, $a + 2, \ldots$ c'est-à-dire Q tout entier. Donc

$$Q = R.$$

(ii) Puisque $Q = \{0, 1\}$ tout endomorphisme de Q est pleinement défini par les images de 0 et de 1. Soit h l'image de 0 et $m + h$ celle de 1 dans un endomorphisme T. L'application $(x \to mx + h)$ est un endomorphisme. Les images de 0 et 1 par T sont h et $m + h$; donc $T = (x \to mx + h)$.

(iii) Pour que T soit un automorphisme de Q il faut et il suffit que $(m, n) = 1$. L'automorphe de Q est donc le groupe linéaire de Z/n.

12. Citons pour mémoire les deux propositions suivantes dont la démonstration est laissée au lecteur:

A. *Dans tout quasigroupe* $Q(\times)$ *d'ordre* n, *automorphe par le groupe linéaire de* Z/n, *la série des produits à droite* [9, N° 7] *engendrée par deux éléments quelconques* $a, b \in Q$ *tels que*

$$a \times b = u(a - b) + b,$$

a pour longueur t, t *étant la plus petite solution de la congruence*

$$\frac{[1 - (-u)^t]}{(1 + u)} \equiv 0 \quad \left(\text{mod. } \frac{n}{d}\right), \qquad \textit{avec } d = (a - b, n).$$

B. *Si T est un automorphisme de Q, appliquant une série de produits à droite, S, sur une de ses permutations circulaires, S', alors la substitution $(S \to S')$ peut toujours être mise sous la forme*

$$(X \to pX + q),\ X \in S,\ \text{avec } (a - b, n) = d = (pd, n)$$

et par conséquent est une partie des cycles d'une substitution appartenant au groupe linéaire L_n.

II. Géométrie définie par QL.

13. Définitions. *Appelons „point" tout ensemble ordonné de trois „coordonnées" x, y, z satisfaisant, dans QL, à $z = x \times y$. Si*

$$A = (x, y, z) \text{ et } B = (x', y', z'),$$

posons

$$\alpha = x' - x,\ \beta = y' - y,\ \gamma = z' - z \qquad (\text{mod. } n);$$

nous dirons que les points

$$(x + \alpha t,\ y + \beta t,\ z + \gamma t), \qquad (t = 0, 1, 2, \ldots, n - 1),$$

sont „alignés" avec A et B. Si $(\alpha, \beta, \gamma, n) = 1$, nous dirons que ces points forment une „droite", que l'on pourra appeler „la droite AB". Les nombres α, β, γ seront dits les „paramètres directeurs" de AB, et on aura: $\gamma = \alpha \times \beta$. L'ensemble des n^2 points de QL sera noté GQL.

Pour justifier la définition il faut prouver (i) que, pour toute valeur de t, le point de Q dont l'abscisse est $x + \alpha t$ et dont l'ordonnée est $y + \beta t$ a pour cote $z + \gamma t$; (ii) que par deux points satisfaisant à la condition $(\alpha, \beta, \gamma, n) = 1$, il passe une droite unique.

(i)
$$\begin{aligned}(x + \alpha t) \times (y + \beta t) &= a(x + \alpha t - y - \beta t) + y + \beta t \\ &= a(x - y) + y + [a(\alpha - \beta) + \beta]\, t \\ &= x \times y + (\alpha \times \beta)\, t.\end{aligned}$$

Par hypothèse, si $t = 1$, cette égalité devient

$$x' \times y' = z' = z + \gamma,$$

d'où $\alpha \times \beta = \gamma$. Donc, en remplaçant $x \times y$ par z et $\alpha \times \beta$ par γ:

$$(x + \alpha t) \times (y + \beta t) = z + \gamma t.$$

(ii) Le seconde partie résulte du théorème suivant.

14. Théorème. (i) *Toute droite de GQL contient exactement n points.*

(ii) *Deux points quelconques distincts (xyz) et $(x'y'z')$ d'une droite, satisfaisant à la condition $(x - x', y - y', z - z', n) = 1$, définissent cette droite.*

Preuve. (i) Supposons que deux points t et $t + h$ soient confondus,

$$\begin{aligned} x + \alpha t &= x + \alpha(t + h) \qquad (\text{mod. } n), \\ y + \beta t &= y + \beta(t + h) \qquad (\text{mod. } n), \\ z + \gamma t &= z + \gamma(t + h) \qquad (\text{mod. } n), \end{aligned}$$

on aura:

$$\alpha h = \beta h = \gamma h = 0 \qquad (\text{mod. } n).$$

Si $(h, n) = d$, on aura;

$$\alpha = \beta = \gamma = 0 \qquad \left(\text{mod. } \frac{n}{d}\right),$$

mais les paramètres directeurs sont tels que $(\alpha, \beta, \gamma, n) = 1$; donc $\frac{n}{d} = 1$, $n = d$, $h = n$ et par conséquent $t + h = t$, modulo n.

Quand t décrit les n valeurs $0, 1, 2, \ldots, n-1$, les n points $(x + \alpha t, y + \beta t, z + \gamma t)$ sont donc distincts.

(ii) Si maintenant

$$C = (x + \alpha t, y + \beta t, z + \gamma t), \quad D = (x + \alpha t', y + \beta t', z + \gamma t') \qquad (t \neq t')$$

sont deux points distincts de la même droite, ils définiront une droite si

$$\alpha' = \alpha(t' - t), \ \beta' = \beta(t' - t), \ \gamma' = \gamma(t' - t)$$

satisfont à la relation $(\alpha', \beta', \gamma', n) = 1$, ce qui exige que $t' - t$ soit premier avec n. Soit E un point quelconque de la droite CD,

$$E = [x + \alpha t + \alpha(t' - t)\, u, y + \beta t + \beta(t' - t)\, u, z + \gamma t + \gamma(t' - t)\, u]$$

et F un point courant sur AB,

$$F = (x + \alpha t'', \ y + \beta t'', \ z + \gamma t'').$$

Il faut montrer qu'il existe une relation entre u et t'' telle que, l'une de ces deux variables étant donnée, on puisse choisir l'autre de façon que E et F coïncident. Or, en égalant les abscisses:

$$x + \alpha t'' = x + \alpha t + \alpha(t' - t)\, u \qquad (\text{mod. } n)$$

et en posant $\mathsf{A} = u(t - t') + t'' - t$, on a: $\alpha\mathsf{A} = 0$ (mod. n). Et de même pour les trois coordonnées:

$$\alpha\mathsf{A} = \beta\mathsf{A} = \gamma\mathsf{A} = 0 \qquad (\text{mod. } n).$$

Mais à cause de $(\alpha, \beta, \gamma, n) = 1$, $\mathsf{A} = 0$.

La congruence

$$u(t - t') + t'' - t = 0 \qquad (\text{mod. } n),$$

où $t - t'$ est premier avec n, est la relation cherchée. Comme il y a coïncidence biunivoque des points de AB avec ceux de CD, $AB = CD$.

La remarque suivante est immédiate:

15. Remarque. *Toute droite est entièrement déterminée par un de ses points et ses paramètres directeurs. Une droite est invariante si l'on multiplie ses paramètres directeurs par un même facteur quelconque, premier avec n.*

16. Théorème. *Par tout point de GQL passent* $n\,\dfrac{(p+1)(q+1)(r+1)\cdots}{pqr\cdots}$ *droites distinctes, $p, q, r, \ldots$ étant les facteurs premiers inégaux de n.*

On commence par établir le lemme suivant:

Lemme. *Sur l'anneau des entiers $\mathbf{Z}/n$, le nombre des systèmes ordonnés de g nombres $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \mu$, dont le PGCD est premier avec n, est*

$$j(n) = \Pi\, p^{(A-1)g}(p^g - 1),$$

si $n = \Pi\, p^A$ avec des p premiers.

Abrégé de la preuve. Partant de l'identité $n^g = \Sigma j(d)$, où d parcourt les diviseurs de n, et du cas particulier $j(p^A) = p^{(A-1)g}(p^g - 1)$, on montre par induction que le lemme est vrai si n est un produit de facteurs premiers inégaux; puis, le supposant vrai si le nombre total des facteurs premiers de n ne surpasse pas m, le nombre des facteurs inégaux étant au plus k, on l'étend à $m + 1$ et k.

Preuve du théorème. Par le point $A = (x, y, z)$ il passe autant de droites qu'il y a de systèmes de paramètres directeurs α, β, γ, satisfaisant à la condition $(\alpha, \beta, \gamma, n) = 1$. Mais il est facile de voir que

$$(\alpha, \beta, \gamma, n) = 1 \rightleftarrows (\alpha, \beta, n) = 1.$$

Il y a donc autant de droites issues de A que de paires ordonnées de nombres $\alpha, \beta \in \mathbf{Z}/n$ tels que $(\alpha, \beta, n) = 1$, c'est-à-dire

$$\Pi\, p^{2(A-1)}(p^2 - 1) = \varphi(n)^2 \frac{(p+1)(q+1)\cdots}{(p-1)(q-1)\cdots}.$$

Mais ces droites ne sont pas toutes distinctes. La droite de paramètres directeurs α, β, γ coïncide (N° 15) avec celle dont les paramètres sont $k\alpha, k\beta, k\gamma$, si $(k, n) = 1$. Cela signifie que chaque droite est obtenue $\varphi(n)$ fois. Le nombre des droites distinctes issues de A est donc:

$$\varphi(n) \frac{(p+1)(q+1)\cdots}{(p-1)(q-1)\cdots} = n \frac{(p+1)(q+1)\cdots}{pqr\cdots}.$$

Si n est premier, ce nombre se réduit à $n + 1$.

Corollaire. *Le nombre total des droites de GQL est:*

$$n^2 \frac{(p+1)(q+1)\cdots}{pq\cdots}.$$

17. Définition. *Si*

$$A = (x, y, z),\ B = (x + \alpha, y + \beta, z + \gamma)$$

sont deux points tels que $(\alpha, \beta, \gamma, n) = d \neq 1$, $dm = n$, *on appellera „sous-droite" AB l'ensemble des m points*

$$(x + \alpha t, y + \beta t, z + \gamma t), \qquad (t = 0, 1, 2, \ldots, m - 1),$$

alignés avec A et B.

18. Théorème. *Étant donnés deux points,*

$$A = (x, y, z),\ B = (x + \alpha d, y + \beta d, z + \gamma d),\ (\alpha, \beta, n) = 1,$$

si $n = md$ et si D est le produit des facteurs premiers inégaux $p, q, r, \cdots$ de d qui ne divisent pas m, il y a:

$$f(d) = \frac{dj(D)}{D\varphi(D)} = d\,\frac{(p+1)(q+1)(r+1)}{pqr\cdots}$$

droites distinctes passant par les m points de la sous-droite

$$AB = (x + \alpha dt, y + \beta dt, z + \gamma dt),\quad t = 0, 1, 2, \ldots, m - 1.$$

Preuve. Soient u, v, w les paramètres directeurs d'une droite contenant la sous-droite AB. On devra donc avoir:

$$kdu = d\alpha,\ kdv = d\beta,\ kdw = d\gamma \qquad (\text{mod. } n)$$

ou:

$$ku = \alpha,\ kv = \beta,\ kw = \gamma \qquad (\text{mod. } m).$$

k est premier avec n, sans quoi $(\alpha, \beta, \gamma, n)$ ne serait pas égal à 1 (N° 13); donc, sans changer la droite considérée, on peut lui attribuer (N° 15) les paramètres ku, kv, kw, c'est-à-dire:

$$\alpha + pm,\ \beta + qm,\ \gamma + rm, \qquad (p, q, r = 0, 1, \ldots, d-1).$$

r est déterminé par p et q (N° 13) et on voit facilement que $r = p \times q$ (mod. d).

Il y aura autant de droites cherchées que de valeurs de p, q satisfaisant à la condition $(\alpha + pm, \beta + qm, n) = 1$. Or $(\alpha + pm, \beta + qm, m) = 1$; il suffit d'exprimer que $(\alpha + pm, \beta + qm, D) = 1$. Quand p et q parcourent les valeurs $0, 1, \ldots, D-1$, $\alpha + pm$ et $\beta + qm$ les parcourent aussi (mod. D), puisque $(m, D) = 1$. Il y a donc (N° 16), $j(D)$ systèmes $\alpha + pm$, $\beta + qm$ (mod. D) tels que $(\alpha + pm, \beta + qm, D) = 1$. Quand p parcourt le champ $0, \ldots, d-1$, il décrit (mod. D), $\frac{d}{D}$ fois l'intervalle $0, \ldots, D-1$ et comme il en est de même de q, le nombre des droites convenables est $\left(\frac{d}{D}\right)^2 j(D)$.

Mais ces droites ne sont pas toutes distinctes. On trouve que le nombre de fois que chaque droite apparait est égal à celui des valeurs de k, $(k, n) = 1$, telles que $k - 1$ soit multiple de $[m', m'', m''']$, avec $m = m'A = m''B = m'''C$ et $(\alpha, m) = A$, $(\beta, m) = B$, $(\gamma, m) = C$. Comme $(A, B, C) = 1$, et que $[m', m'', m''] = \frac{m}{(A, B, C)} = m$, chaque droite apparait autant de fois qu'il y a de termes premiers avec n dans la suite $1, 1 + m, 1 + 2m, \ldots, 1 + (d-1)m$, soit $\frac{d}{D}\varphi(D)$ fois. Le nombre des droites distinctes est ainsi

$$\left(\frac{d}{D}\right)^2 \frac{j(D)}{d\varphi(D)\frac{1}{D}} = \frac{dj(D)}{D\varphi(D)}.$$

On remarquera que si $d = 1$, ou n, on retrouve les résultats des N° 14 et 16.

19. Théorème. *Étant donnée une droite AB,*

$$A = (x, y, z),\ B = (x + \alpha t, y + \beta t, z + \gamma t), \quad (\alpha, \beta, n) = 1,$$

si $n = dm$, si $D = pqr \cdots$ est le produit des facteurs premiers inégaux de d ne divisant pas m et D' celui des facteurs premiers inégaux de d qui divisent m, alors, le nombre des droites dont l'intersection avec AB se compose exactement des m points de la sous-droite

$$(x + \alpha dt,\ y + \beta dt,\ z + \gamma dt)$$

est

$$h(d) = d\frac{\varphi(D')}{D'}.$$

Preuve. Soit P un facteur premier de d. Pour avoir $h(d)$ il faut retrancher à $f(d)$ (N° 18) la somme $\Sigma f\left(\frac{d}{P}\right)$, où P parcourt tous les diviseurs premiers inégaux de d. En vertu du principe d'inclusion et d'exclusion:

$$h(d) = f(d) - \Sigma f\left(\frac{d}{P}\right) + \Sigma f\left(\frac{d}{PQ}\right) - \Sigma f\left(\frac{d}{PQR}\right) + \cdots + (-)^k f\left(\frac{d}{DD'}\right)$$

où k est le nombre des facteurs premiers distincts de d.

On trouve que $h(P^i) = P^i - P^{i-1}$ ou P^i suivant que P divise ou non m; d'autre part, h est fortement multiplicative, $h(ab) = h(a)\,h(b)$, si a et b sont premiers entre eux Si $p', q', \ldots$ sont les facteurs premiers de D',

$$h(d) = d\,\frac{(p'-1)\,(q'-1)\cdots}{p'q'\cdots} = d\,\frac{\varphi(D')}{D'}.$$

On constate, à titre de vérification, que

$$f(d) = \Sigma\, h(\delta)$$

où δ parcourt tous les diviseurs de d.

20. On parvient au même résultat au moyen des trois propositions suivantes:

A. *La condition nécessaire et suffisante pour que les deux droites*

$$(x+\alpha t,\ y+\beta t,\ z+\gamma t),\ (x+\alpha' t',\ y+\beta' t',\ z+\gamma' t'),$$
$$(\alpha, \beta, n) = 1,\ (\alpha', \beta', n) = 1,\ (t, t' = 0, 1, 2, \ldots, n-1),$$

aient pour intersection la sous-droite

$$(x+\alpha dv,\ y+\beta dv,\ z+\gamma dv), \qquad (v = 0, 1, 2, \ldots, m-1),$$

est que le PGCD de $\alpha\beta' - \beta\alpha'$ *et de* n *soit* $m = \dfrac{n}{d}$.

B. *Si* α, β, n *et* m *sont donnés,* $(\alpha, \beta, n) = 1$, $n = md$, *l'équation* $(\alpha\beta' - \beta\alpha', n) = m$ *aura* $n\varphi(d)$ *systèmes de solutions* (*mod.* n) *en* α', β'.

C. *Si* $G(n, d)$ *est le nombre des solutions en* α', β', *avec* $(\alpha', \beta', n) = 1$, *de* $(\alpha\beta' - \beta\alpha', n) = m$, $(\alpha, \beta, n) = 1$, *on a:*

$$n\varphi(d) = \Sigma\, G(dk, d)$$

où k *décrit les diviseurs de* m. *On a:*

$$G(n, d) = d\varphi(d)\ \varphi(m), \quad h(d) = \frac{G(n, d)}{\varphi(n)}.$$

21. En utilisant les N° 16 et 20, on aboutit à:

Étant donnés une droite $M = (x+\alpha t,\ y+\beta t,\ z+\gamma t)$ *et un point* $A = (x', y', z')$,

(i) *le nombre des droites issues de* A *qui coupent* M *en* d *points* ($d \neq 0$, *mod.* n) *est* $h\left(\dfrac{n}{d}\right)$, *où* d *est diviseur du PGCD* $((x'-x)\,\beta - (y'-y)\,\alpha, n) = \varrho$.

(ii) *Si* $\left(\varrho, \dfrac{n}{\varrho}\right) = 1$, *le nombre total des droites issues de* A *et coupant* M *est* $S = n\,\dfrac{(q+1)\,(r+1)\cdots}{qr\cdots}$, *où* $q, r, \ldots$ *sont les facteurs premiers inégaux de* ϱ, ($S = n$ *si* $\varrho = 1$).

(iii) *Le nombre des non-sécantes à* M *issues de* A *est* $n\,\dfrac{(p+1)\cdots(q+1)\cdots}{p\cdots q\cdots} - S$, *où* $p, \ldots, q, \ldots$ *sont les diviseurs premiers inégaux de* n.

(iv) *Si* n *est premier, on peut mener par* A *une non-sécante unique à* M *et* n *sécantes, coupant chacune* M *en un seul point.*

22. Définition. *Deux droites sont parallèles si elles ont les mêmes paramètres directeurs* (à un facteur commun près, premier avec n).

23. Théorème. (i) *Tout automorphisme de QL transforme une droite quelconque $D = (x + \alpha t, y + \beta t)$ en une droite parallèle à D, pouvant coïncider avec D. Tout endomorphisme de QL projette D sur une sous-droite portée par une parallèle à D, pouvant être D elle-même.*

(ii) *La droite $x = y$, $\alpha = \beta$ est invariante par chacun des $n\varphi(n)$ automorphismes de QL.*

(iii) *Si $\alpha = \beta$, $x \neq y$ et si $(x - y, n) = d$, le nombre des endomorphismes projetant D dans D ou sur D est dn.*

(iv) *Si les paramètres directeurs de D sont inégaux et si*

$$\frac{p}{q} = \frac{\beta x - \alpha y}{\alpha - \beta}, \quad (p, q) = 1, \quad (n, pq) = \delta,$$

alors, il y a $\frac{n^2}{\delta}$ tels endomorphismes.

Preuve. (i) On sait (N° 11) que tout automorphisme de QL est de la forme $(x \to mx + h)$, $(m, n) = 1$. Dans cette transformation, le point $(x + \alpha t, y + \beta t)$ qui décrit la droite D, devient $(mx + h + m\alpha t, my + h + m\beta t)$. Ce point décrit la droite de paramètres directeurs $m\alpha, m\beta$, issue du point $(mx + h, my + h)$, image de (x, y). Cette droite est parallèle à D. Si m n'est pas premier avec n, la transformation devient un endomorphisme; elle projette D sur une sous-droite, portée par une parallèle à D.

(ii) Si $\alpha = \beta$, $x = y$, il est évident que tout automorphisme de L_n laisse D invariante. Tout endomorphisme de QL projette D dans D.

(iii) Si $x \neq y$, D portera sa propre image si le point $(mx + h, my + h)$ appartient à D, c'est à dire si $mx + h = x + \alpha t$, $my + h = y + \beta t$, ou:

$$(1) \qquad (m - 1)\, x = \alpha t - h, \quad (m - 1)\, y = \beta t - h \qquad (\text{mod. } n).$$

Quand $\alpha = \beta$, ce système se réduit à:

$$(m - 1)\ (x - y) = 0 \qquad (\text{mod. } n).$$

En posant $(x - y, n) = d$, la condition s'écrit:

$$m = 1 + \frac{kn}{d}, \quad \left(k = 0, 1, 2, \ldots, \frac{n}{d} - 1\right).$$

La valeur de m étant choisie, le système se réduit à une seule équation,

$$(m - 1)\, x = \alpha t - h.$$

On peut alors déterminer h par le choix arbitraire de t, et comme $(\alpha, n) = 1$, on peut choisir n valeurs de h pour chaque valeur de m. Le nombre total des endomorphismes qui projettent D dans lui-même est ainsi nd.

(iv) Si les paramètres de D sont inégaux, (1) aura des solutions en t si:

$$(m - 1)\ (\beta x - \alpha y) = h(\alpha - \beta) \qquad (\text{mod. } n),$$

soit, en appelant $\frac{p}{q}$ la fraction irréductible égale à $\frac{\beta x - \alpha y}{\alpha - \beta}$,

$$m = 1 + kq, \quad h = kp.$$

Il y aura autant d'endomorphismes de QL laissant D invariante, ou la projetant dans elle-même, que de systèmes de valeurs distinctes de m, h.

Si $(q, n) = q'$ et $(p, n) = p'$, m prendra $\frac{n}{q'}$ valeurs distinctes (mod. n) et h en prendra $\frac{n}{p'}$. Le nombre des valeurs de m, h est donc $\frac{n^2}{p'q'}$, et comme $(p, q) = 1$ et $p'q' = (n, pq) = \delta$, le nombre des endomorphismes est $\frac{n^2}{\delta}$.

24. Pour faciliter les énoncés, introduisons, sur l'ensemble produit Q^2, un nouveau groupoïde, dont les éléments sont les points (x, y, z) définis au N° 13.

Scolie. *Pour que l'ensemble $Q'(\cdot)$ des points*

$$(x, y, z),\ (x', y', z') \ldots,\ (x \times y = z)$$

d'un quasigroupe quelconque $Q(\times)$, non nécessairement QL, muni de la loi de composition

$$(x, y, z) \cdot (x', y', z') = (x \times x', y \times y', z \times z')$$

soit un quasigroupe, il faut et il suffit que $Q(\times)$ satisfasse à la loi d'entropie

$$(a \times b) \times (c \times d) = (a \times c) \times (b \times d),$$

[5, p. 509], [2, p. 444].

Dans ce qui suit, un tel quasigroupe, s'il est issu de QL, sera noté Q_g.

Preuve. La loi du quotient est vérifiée puisque $Q'(\cdot)$ est le produit direct de Q par Q. Pour que $(x \times x', y \times y', z \times z')$ soit un point de Q' il faut que $(x \times x') \times (y \times y') = (z \times z')$. Or $z = x \times y$, $z' = x' \times y'$, d'où:

$$(x \times x') \times (y \times y') = (x \times y) \times (x' \times y').$$

La réciproque est immédiate. Si Q est idempotent, il sera de plus distributif [3].

25. Corollaire. *Dans Q_g deux points et leur produit sont en ligne droite.*

Preuve. Soient

$$A = (x + \alpha t, y + \beta t, z + \gamma t),\ B = (x + \alpha t', y + \beta t', z + \gamma t')$$

deux points d'une même droite D. On a:

$$\begin{aligned}(x + \alpha t) \times (x + \alpha t') &= a(x + \alpha t) + (1 - a)(x + \alpha t') \\ &= x + \alpha[at + (1 - a)t'] = x + \alpha(t \times t'),\end{aligned}$$

d'où:

$$A \cdot B = [x + \alpha(t \times t'),\ y + \beta(t \times t'),\ z + \gamma(t \times t')].$$

Ce point appartient à la droite D.

26. Corollaire. *Les n points d'une droite quelconque $D \in Q_g$ forment un diviseur de Q_g isomorphe à QL.*

Preuve. Si l'on désigne les points de D par la valeur correspondante de t:

$$A_t = (x + \alpha t, y + \beta t),$$

on aura:

$$A_t \cdot A_{t'} = A_{t \times t'}.$$

L'application $A_t \to t$ est donc un isomorphisme I:

$$DI = Q.$$

27. Remarque. *Si deux droites D, D' sont parallèles, toute droite qui coupe l'une en m points ($n = md$), coupe l'autre en m points.*

Cela résulte immédiatement du N° 20.

28. Théorème (i) *Toute droite $D \in Q_g$ est diviseur normal de Q_g; les cosets sont les parallèles à D.*

(ii) *Le système des représentants est formé des n points d'intersection des n parallèles avec une sécante coupant D en un seul point.*

(iii) *Il est isomorphe à QL et au quasigroupe quotient Q_g/D.*

Preuve. (i) Pour établir que les parallèles à D définissent une partition régulière de Q_g il suffit de prouver que si $A = (x + \alpha t,\ y + \beta t)$ et $B = (x' + \alpha t',\ y' + \beta t')$ décrivent deux droites parallèles, leur produit $A \cdot B$ décrit une troisième parallèle déterminée. Or:

$$A \cdot B = [x \times x' + \alpha(t \times t'),\quad y \times y' + \beta(t \times t')].$$

$A \cdot B$ décrit donc la parallèle à D, issue du point fixe

$$(x \times x',\ y \times y',\ z \times z') = (x, y, z) \cdot (x', y', z').$$

(ii) résulte immédiatement des N° 26—27.

(iii) D'après le N° 26, le système des représentants, étant une droite, est isomorphe à QL. D'autre part, la loi de composition de QL induit sur l'ensemble Q_g/D des cosets une loi de quasigroupe isomorphe à celle de QL. Donc:

$$QL \cong D \cong Q_g/D.$$

29. Remarque. *L'automorphe de QL est isomorphe à un diviseur de celui de Q_g.*

Preuve. Si $(x \to x')$ est un automorphisme de $QL(\times)$ on a:

$$(x,y,z) \cdot (a,b,c) = (x \times a,\ y \times b,\ z \times c) \to (x',y',z') \cdot (a',b',c') = (x' \times a',\ y' \times b',\ z' \times c'),$$

donc $[(x, y, z) \to (x', y', z')]$ est un automorphisme de Q_g. Mais il n'est pas évident que tout automorphisme de Q_g soit de cette forme.

30. Théorème. (i) *Le faisceau des droites issues d'un même point, muni de la loi de composition* $(*)$:

$$D'' = D * D' \to \alpha'' = \alpha \times \alpha',\ \beta'' = \beta \times \beta',$$

où α, β; α', β'; α'', β'' sont les paramètres directeurs de D, D', D'', est un quasigroupe Q_d, d'ordre $n\dfrac{(p+1)(q+1)\cdots}{pq\cdots}$, où $p, q, \ldots$ sont les facteurs premiers inégaux de n (N° 16).

(ii) *Si deux droites de ce faisceau se coupent en d points, leur produit les coupe encore en ces mêmes d points.*

(iii) *Q_d est homomorphe à Q_g.*

(iv) *L'automorphe du faisceau de sommet $A = (x, y, z)$ contient les $\varphi(r)$ automorphismes induits par:*

$$(X \to mX + h),\ m = 1 + \frac{kn}{r},\ h = \frac{-knx}{r},\ r = (x - y, n),\ X \in Q.$$

Preuve. (i) Considérons l'ensemble des droites qui passent par le point $A = (x, y, z)$. Soient deux d'entre elles,

$$D = (x + \alpha t,\ y + \beta t),\ D' = (x + \alpha' u,\ y + \beta' u);$$

posons:

$$D'' = D \ast D' = [x + (\alpha \times \alpha')\, w,\ y + (\beta \times \beta')\, w,\ z + (\gamma \times \gamma')\, w];$$

on a $\gamma = \alpha \times \beta$ et $\gamma' = \alpha' \times \beta'$, donc

$$\gamma \times \gamma' = (\alpha \times \beta) \times (\alpha' \times \beta')$$

et puisque QL est entropique (N° 3, in fine),

$$\gamma \times \gamma' = (\alpha \times \alpha') \times (\beta \times \beta')$$

et $D \ast D'$ représente bien une droite, issue de A et de paramètres directeurs $\alpha \times \alpha'$, $\beta \times \beta'$, $\gamma \times \gamma'$.

Dans le cas où D et D' se coupent en plusieurs points, la définition fournit la même droite D'' quel que soit le point d'intersection choisi, car les paramètres de D'', obtenus en composant ceux de D et de D', ne dépendent que de ces derniers et non du point commun choisi.

(ii) Il en résulte que si $D \cap D'$ est composée de d points, leur produit $D \ast D'$ coupe aussi D et D' en ces mêmes d points, ce que l'on peut d'ailleurs vérifier directement.

(iii) Si l'on représente chaque droite du faisceau par ses paramètres α, β, γ, alors Q_d est homomorphe à Q_0 par l'application qui projette les $\varphi(n)$ points $(k\alpha, k\beta, k\gamma)$, $(k, n) = 1$, sur la droite de paramètres α, β, γ, car $k\alpha, k\beta, k\gamma$ définissent, dans le faisceau, la même droite que α, β, γ.

(iv) Les automorphismes de QL $(X \to mX + h)$, $X \in QL$, qui laissent le sommet $A(x, y, z)$ du faisceau invariant, induisent sur ce faisceau un automorphisme. Ce sont ceux qui satisfont à:

$$x = mx + h, \quad y = my + h \qquad (\text{mod. } n),$$

ou:

$$(x - y)(m - 1) = 0 \qquad (\text{mod. } n),$$

soit, en posant $r = (x - y, n)$, $m - 1 = 0 \qquad \left(\text{mod. } \dfrac{n}{r}\right)$,

$$m = 1 + \frac{kn}{r}, \quad k = 0, 1 \ldots, r - 1; \quad (k, r) = 1,$$

$$h = (1 - m)\, x = \frac{-knx}{r}.$$

31. Remarques. I. Dans la loi de composition $D \ast D' = D''$, si A et A' sont deux points appartenant respectivement à D et à D', en général $A \cdot A' \in D \ast D'$.

II. La loi de composition de deux sécantes ne dépend pas du point d'intersection choisi sur ces deux droites. Elle peut être étendue à l'ensemble des $n^2 \dfrac{(p+1)(q+1)\cdots}{pq\cdots}$ droites (N° 16) de GQL. Le produit n'existe que si les deux facteurs se coupent. Si deux droites sont parallèles, leur produit a été défini aux N° 24 et 28. On peut immerger les deux lois dans un même groupoïde. On obtient ainsi un quasigroupe incomplet, où la multiplication n'est définie que si les facteurs sont sécants ou parallèles. Il est idempotent.

32. Autotopie. (i) *Les isotopies*

$$(C) = (X\colon x \to mx + h,\ Y\colon y \to my + h',\ Z\colon z \to mz + h \times h'),\ (m, n) = 1$$

transforment QL en lui-même et forment un groupe d'ordre $n^2\varphi(n)$.

(ii) *L'image d'une droite dans une telle autotopie est une droite parallèle, pouvant coïncider avec la première; (C) est donc une homographie..*

(iii) *Les homographies (C) qui laissent un point A fixe forment un groupe d'ordre $\varphi(n)$ isomorphe au groupe multiplicatif des entiers premiers avec n dans Z/n. Ce groupe laisse invariant le faisceau de sommet A.*

(iv) *Les homographies (C) qui laissent une droite invariante forment un groupe d'ordre $n\varphi(n)$.*

Preuve. (i) Il suffit de vérifier que

$$(mx + h) \times (my + h') = mz + h \times h',$$

c'est à dire

$$a(mx + h) + (1 - a)(my + h') = m[ax + (1 - a)y] + h \times h',$$

ou

$$ah + (1 - a)h' = h \times h',$$

ce qui est une identité. Ces autotopies forment un groupe dont chaque élément est défini par les trois nombres m, h, h' et qui est d'ordre $n^2\varphi(n)$. Si $(m, n) \neq 1$, on peut dire que (C) est une „*endotopie*". Elle projette QL sur un de ses diviseurs.

(ii) Soit la droite

$$D = (x + \alpha t, \quad y + \beta t).$$

Elle devient par (C):

$$m(x + \alpha t) + h = mx + h + m\alpha t, \quad m(y + \beta t) + h' = my + h' + m\beta t.$$

Le point $(mx + h;\ my + h')$ est l'image de $A = (x, y)$ dans l'autotopie. De plus, comme $(m, n) = 1$, $(m\alpha, m\beta, n) = 1$. Ainsi l'image de D est une droite, issue du point image de A, et ayant pour paramètres $m\alpha, m\beta, m\gamma$, c'est-à-dire une parallèle à D. Ainsi (C) est une collinéation.

(iii) Soit $A = (u, v)$ un point double dans (C), m un nombre quelconque, premier avec n. Prenons $h = u(1 - m)$ et $h' = v(1 - m)$ (mod. n); l'homographie (m, h, h') laissera A invariant. Toute autotopie (C) laissant A fixe est donc déterminée par m. Ces autotopies forment donc un groupe isomorphe au groupe multiplicatif des m, ce que l'on peut vérifier directement.

Dans ces collinéations, toute droite passant par le point fixe $A = (u, v)$ reste invariante.

(iv) Par l'autotopie (m, h, h') la droite

$$D = (x + \alpha t, \quad y + \beta t)$$

est transformée en une droite D' parallèle à D,

$$D' = [m(x + \alpha t) + h, \quad m(y + \beta t) + h'].$$

D' coïncide avec D si le point (x, y, z) figure parmi les points de D', c'est à dire si, pour quelque valeur de t, on a:

$$x = mx + h + m\alpha t, \quad y = my + h' + m\beta t,$$

ou:

$$(\beta x - \alpha y)(1 - m) = \beta h - \alpha h' \qquad (\text{mod. } n).$$

Si l'on se donne arbitrairement h, cette congruence déterminera h'. Quand $(\alpha, n) = d$ on peut choisir h de $\frac{n}{d}$ manières, donnant chacune d solutions en h'. Il y a donc $\left(\frac{n}{d}\right) d = n$ choix de h, h' et $\varphi(n)$ choix de m; le groupe des collinéation (C) qui transforment une droite en elle même est d'ordre $n\varphi(n)$.

33. Balanced incomplete block designs (B. I. B. D). Quand n est premier ($\neq 2$), QL définit une géométrie euclidienne finie de n^2 points, $n(n+1)$ droites (N° 16). Par tout point passent $n+1$ droites; par deux points une droite unique. D'après le N° 21, iv, on peut mener par un point extérieur à une droite une parallèle et une seule à celle-ci, et n sécantes, coupant chacune la droite donnée en un seul point. Donc, quand n est premier, GQL est un „balanced incomplete block design" (B. I. B. D) de Yates [12], avec:

$$\begin{aligned} v &= n^2 \text{ variétés,} \\ b &= n(n+1) \text{ blocs,} \\ k &= n \text{ éléments par bloc,} \\ r &= n+1 \text{ répétitions,} \\ \lambda &= 1. \end{aligned}$$

C'est là un type bien connu. Les blocs peuvent être répartis en ensembles disjoints de n blocs (les droites parallèles) et cela de $n+1$ manières (N° 28).

Si n n'est plus premier, on a:

$$v = n^2, \; b = v\,\frac{(p+1)(q+1)\cdots}{pq\cdots}, \; r = \frac{b}{n}, \; k = n;$$

mais λ n'est plus constant car, par deux points donnés il passe un nombre variable de droites (N° 18).

34. Remarque finale. La seconde partie de ce travail ne fait que défricher le terrain: Il serait intéressant de savoir ce que deviennent les théorèmes de Pascal, de Desargues, le quadrilatère de von Staudt et d'étudier des géométries analogues à GQL dans le cas de quasigroupes plus généraux; enfin, d'élucider comment la conclusion du N° 11, $Q = \{0, 1\}$, doit être adaptée au cas général.

Ce m'est un bien agréable devoir, en terminant, d'exprimer ici mes vifs remerciements au Dr Hasse pour les conseils éclairés et pour l'aide amicale qu'il m'a prodigués au moment de la rédaction définitive de ce papier.

Index des notations.

	N°		N°
Droite	13	L_n	1
$f(d)$	18	Parallèles	22
GQL	13	Paramètres directeurs	13
Groupe Cyclique	1	$P(n)$	4
— Géométrique	1	Point	13
— Linéaire	1	Q_d	30
$h(n)$	19	Q_g	24
Incomplet (quasigroupe)	1	QL	11
$j(n)$ (lemme)	16	Sous-droite	17

Références.

(1) *C. Burstin-W. Mayer*, Distributive Gruppen von endlicher Ordnung. Journ. reine ang. Math. **160** (1929), 111–130.
(2) *I. M. H. Etherington*, Non-associative Arithm. Proc. Edinburgh **62** (1949), 441–453.
(3) *B. Knaster*, Sur une équivalence pour les fonctions. Coll. Math. **2** (1949), 1–4.
(4) *W. J. LeVeque*, Topics in Number Theory. Addison-Wesley Publ. C° Inc. Reading. Mass. 1956.
(5) *D. C. Murdoch*, Quasigroups which satisfy certain generalized associative laws. Amer. J. Math. **61** (1939), 509–522.
(6) *Ø. Ore*, Theory of equivalence relations. Duke Math. J. **9** (1942), 573–627.
(7) *A. Sade*, Groupoïdes automorphes par le groupe cyclique. Canadian J. Math. **9** (1957), 321–335.
(8) –, Groupoïdes automorphes par le groupe géométrique. A paraître dans Canadian J. Math. **10** (1958).
(9) –, Quelques remarques sur l'isomorphisme et l'automorphisme des quasigroupes. A paraître dans Abhandlungen Math. Sem. Hamburg **22** ou **23** (1958).
(10) *J. B. Shaw*, On parastrophic Algebras. Trans. Amer. Math. Soc. **16** (1915), 361–370.
(11) *S. K. Stein*, Foundations of quasigroups. Proc. Nat. Acad. Sci. **42** (1956), 545–546.
(12) *F. Yates*, Incomplete randomized blocks. Annals Eugenics **7** (1936), 121–140.

Eingegangen 30. Juli 1957.

Über Anwachsen und Nullstellenverteilung der ganzen transzendenten Lösungen linearer Differentialgleichungen. I.

Von *Klaus Pöschl* in München.

1. Einführung.

Unter den in der offenen komplexen Ebene $|z| < \infty$ eindeutigen analytischen Funktionen haben neuerdings Lösungen algebraischer, insbesondere linearer Differentialgleichungen besonderes Interesse gefunden. Mit Hilfsmitteln der Wertverteilungslehre lassen sich aus der Differentialgleichung allgemein Schlüsse über das Verhalten der Lösungen bei großen $r = |z|$ gewinnen. Jede Lösung der im folgenden betrachteten linearen Differentialgleichung

$$(1,01)\quad w^{(m)}(z) + p_1(z)\, w^{(m-1)}(z) + \cdots + p_{m-1}(z)\, w'(z) + p_m(z)\, w(z) = 0$$

mit Polynomkoeffizienten $p_j(z)$, $(j = 1, 2, \ldots m)$ ist eine ganze Funktion, in der Regel ganz transzendent, in Ausnahmefällen ein Polynom. Vom Standpunkt der Wertverteilungslehre interessiert in erster Linie die Wachstumsordnung

$$(1,02)\qquad \lambda = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln \ln M(r)}{\ln r}$$

mit $M(r) = \operatorname*{Max}_{|z|=r} |w(z)|$. Eine ganze transzendente Lösung $w(z)$ von (1, 01) hat rationale Wachstumsordnung λ und ist vom Normaltypus dieser Ordnung, d. h. der Grenzwert (Typus)

$$(1,03)\qquad t = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln M(r)}{r^{\lambda}}$$

ist endlich und von Null verschieden. In (1, 02) und (1, 03) kann hier einfach lim statt $\overline{\lim}$ geschrieben werden, da die Differentialgleichung eine gewisse Regelmäßigkeit im Verhalten von $w(z)$ zur Folge hat. Da also gilt

$$(1,04)\qquad \ln M(r) = tr^{\lambda}\,(1 + \varepsilon(r))$$

mit $\varepsilon(r) \to 0$ für $r \to \infty$, wird durch die Zahlen λ und t das Anwachsen der ganzen transzendenten Lösungen charakterisiert. Die Werte, die dafür in Betracht kommen, lassen sich, wie gleich beschrieben wird, in einfacher Weise aus dem Verhalten der Polynome

$$(1,05)\qquad p_j(z) = a_j z^{k_j} + \cdots = a_j z^{k_j}\left(1 + O\left(\frac{1}{z}\right)\right)$$

bei $|z| \to \infty$ gewinnen; k_j bezeichnet den Grad von p_j und a_j den Koeffizienten der höchsten Potenz. Ferner wir eingeführt

$$(1,06)\qquad k = \operatorname*{Max}_{j=1}^{m} k_j$$

und

$$(1,07)\qquad \alpha_j = m - j + k - k_j.$$

Die Wachstumsordnung λ einer ganzen transzendenten Lösung $w(z)$ von (1, 01) ist dann notwendig gleich einer der rationalen Zahlen, für die die Gleichung

$$(1,08)\qquad \sum_{j=0}^{m} a_j x^{\alpha_j} y^j = 0$$

mit

$$(1,09)\qquad y = Bx^{\lambda}(1 + h(x)), \quad h(x) \to 0 \text{ für } x \to 0,$$

und $\lambda > 0$ bei $x = 0$ erfüllbar ist [9], [10]. Es sollen also in der Summe

$$\sum_{j=0}^{m} a_j B^j x^{\alpha_j + j\lambda} \qquad (a_0 = 1)$$

mindestens zwei Glieder mit dem kleinsten Exponenten von x vorkommen; diese Glieder, gleich Null gesetzt, geben eine algebraische Gleichung (von einem Grade $\leqq m$)

$$(1,10)\qquad \sum_{(h)} a_h B^h = 0$$

für die Konstante B. In (1, 08) haben x und y die Bedeutung:

$\frac{1}{x} = \zeta$, wo ζ ein Punkt auf $|z| = r$ ist, in dem $M(r) = |w(\zeta)|$ erfüllt ist,

$\frac{1}{y} = n(r)$, wo $n(r)$ der sogenannte Zentralindex ist, d. i. bei gegebenem $r = |z|$ der Index ν des Reihengliedes mit dem größten absoluten Betrag in der Nullpunktentwicklung

$$w(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} C_\nu z^\nu$$

der ganzen Funktion. Wenn es mehrere solche Glieder gibt, so sei $n(r)$ der größte unter den zugehörigen Indizes. Mit $r \to \infty$ geht $n(r) \to \infty$, also mit $x \to 0$ auch $y \to 0$. Ist $w(z)$ eine ganze transzendente Funktion, so gilt ferner [9] für alle r außerhalb gewisser Ausnahmemengen von endlichem logarithmischem Maß

$$(1,11)\qquad \left(\frac{d^j w}{dz^j}\right)_{z=\zeta} = \left(\frac{n(r)}{\zeta}\right)^j w(\zeta)\,(1 + \varepsilon(r)),$$

wo wieder $\varepsilon(r) \to 0$ für $r \to \infty$ und, mit beliebigem festem $\eta > 0$,

$$n(r) < [\ln M(r)]^{1+\eta}$$

ist. Die Beziehung (1, 08) folgt aus der Differentialgleichung (1, 01), wenn man darin (1, 11) einführt und nur die höchsten Potenzen von z beachtet.

Durch (1, 08) wird eine algebraische Funktion $y(x)$ definiert. Nur diejenigen Zweige kommen in (1, 09) in Betracht, für die $y \to 0$ bei $x \to 0$ gilt. Man erkennt so ohne weiteres, daß die möglichen Ordnungen λ rationale Zahlen sind. Aus der Bedingung $\alpha_j + j\lambda = \alpha_i + i\lambda$ für mindestens zwei ganze Zahlen i, j folgt $\lambda = \frac{\alpha_i - \alpha_j}{j - i}$.

Diese Ordnungen erhält man auch aus der folgenden Konstruktion (Puiseux-Diagramm [4], [11], Fig. 1): Man trage an den ganzzahligen Abszissen $j = 0, 1 \ldots, m$ die Zahlen α_j als Ordinatenwerte auf und zeichne dasjenige gegen die Abszisse *konvexe* Polygon, dessen Ecken von den Punkten $(0, \alpha_0)$ und (m, α_m) und weiteren der Punkte (j, α_j) gebildet wird; unterhalb dieses Streckenzuges soll keiner dieser Punkte liegen. Sind (i, α_i) und (j, α_j) zwei aufeinanderfolgende Ecken im *fallenden* Teil des Polygons $(\alpha_i > \alpha_j)$, so ist

$$\frac{\alpha_i - \alpha_j}{j - i} = 1 + \frac{k_j - k_i}{j - i}$$

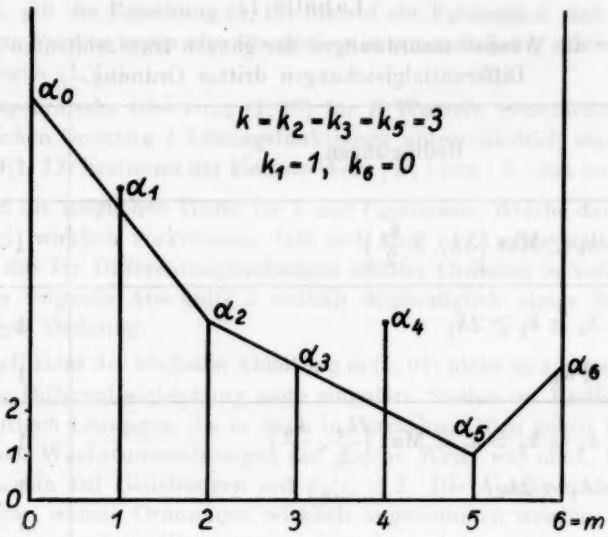

Fig. 1.

eine mögliche Ordnung λ; die Vielfachheit, d. h. die Anzahl linear unabhängiger ganzer transzendenter Lösungen, die samt allen ihren Linearkombinationen von dieser Ordnung sind, ist $\leqq \alpha_i - \alpha_j = (j - i)\,\lambda$. (In Fig. 1, wo $p = 6$, ist also $\lambda_1 = (\alpha_0 - \alpha_2)/2$ von einer Vielfachheit $\leqq 2\,\lambda_1$, $\lambda_2 = \alpha_2 - \alpha_3$ von einer Vielfachheit $\leqq \lambda_2$).

Das kleinste λ, das auftreten kann, beträgt $\dfrac{1}{m-1}$; das Polygon im Puiseux-Diagramm hat dann (Fig. 2) die drei Ecken $(0, \alpha_0)$, $(1, \alpha_1)$, (m, α_m) mit $\alpha_m = \alpha_1 - 1$.

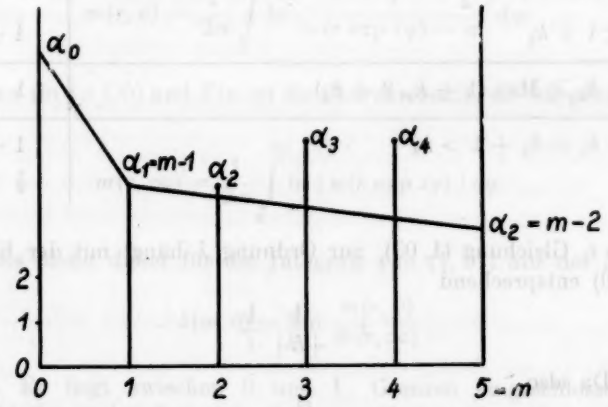

Fig. 2.

Die zugehörigen Bedingungen für die Grade der Koeffizienten lauten $k_\mu + \mu \leqq k_1 + 1$ $(\mu = 2, 3, \ldots m-1)$ und $k_m = k_1 - m + 2$, so daß $k = k_1$, $\alpha_1 = m - 1$ und $\alpha_2 = m - 2$ ist.

Zur Erläuterung des Folgenden sind in Tabelle I die Differentialgleichungen (1, 01) dritter Ordnung nach den möglichen Wachstumsordnungen ihrer ganzen transzendenten Lösungen klassifiziert. Für die Gleichungen vierter Ordnung werden die Verhältnisse schon recht unübersichtlich.

Tabelle I.

Übersicht über die Wachstumsordnungen der ganzen transzendenten Lösungen der Differentialgleichungen dritter Ordnung.

Fall	Bedingungen	mögliche Ordnungen
1	$k = k_3 \geqq \operatorname{Max}\left(3k_1; 3\frac{k_2}{2}\right)$	$1 + \frac{k_3}{3}$
2	$k = k_3 \geqq k_2 \geqq 2k_1$ $k_3 < \frac{3}{2} k_2$	$1 + \frac{k_2}{2}$ $1 + k_3 - k_2$
3	$k = k_3 = k_2 > k_1 > \operatorname{Max}\left(\frac{k_2}{2}, \frac{k_3}{3}\right)$ $k_1 + k_3 < 2k_2$	$1 + k_1$ $1 + k_2 - k_1$ $1 + k_3 - k_2$
4	$k = k_3 \geqq k_1 > \operatorname{Max}\left(\frac{k_2}{2}, \frac{k_3}{3}\right)$ $k_1 + k_3 \geqq 2k_2$	$1 + k_1$ $1 + \frac{k_3 - k_1}{2}$
5	$k = k_2 \geqq \operatorname{Max}(1 + k_3, 2k_1)$	$1 + \frac{k_2}{2}$
6	$k = k_2 \geqq k_1 > \frac{k_2}{2}$ $k_2 \geqq 1 + k_3$	$1 + k_1$ $1 + k_2 - k_1$
7	$k = k_1 \geqq \operatorname{Max}(1 + k_2, 2 + k_3)$	$1 + k_1$
8	$k = k_1 = k_3 + 1 > k_2$	$1 + k_1$ $\frac{1}{2}$

Der Typus t, Gleichung (1, 03), zur Ordnung λ hängt mit der Konstanten B in (1, 09) und (1, 10) entsprechend

$$t = \frac{1}{|B|} \frac{1}{\lambda} \tag{1, 12}$$

zusammen [9]. Da also

$$\ln M(r) = \frac{\zeta^\lambda}{\lambda B} [1 + \varepsilon(r)]$$

und die Ordnung λ eine rationale Zahl p/q ist (p und q ganz, teilerfremd), so werden durch

$$\operatorname{arc} z = \varphi_\nu \equiv (\operatorname{arc} B + 2\pi\nu) \frac{q}{p} \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, p - 1) \tag{1, 13}$$

asymptotische Richtungen in der z-Ebene mit folgender Bedeutung bestimmt: Für die Punkte ζ, in denen auf $|z| = r$ eine Lösung der Ordnung λ den Maximalbetrag $M(r)$

annehmen kann, gilt die Beziehung (1, 13) bis auf ein Fehlerglied, das mit $r \to \infty$ gegen Null strebt. Diese Punkte liegen also für große r in einem beliebig schmalen Winkelraum um die Richtungen (1, 13).

Hat die algebraische Gleichung (1, 10) für B Wurzeln verschiedenen Betrages, so können zur gleichen Ordnung λ Lösungsfunktionen unterschiedlich starken Anwachsens gehören. Wegen (1, 12) bestimmt der kleinste Wert $|B_1|$ von $|B|$ das stärkste Wachstum.

Damit sind die möglichen Werte für λ und t gefunden. Welche davon bei den Integralen von (1, 01) wirklich vorkommen, läßt sich aber nicht ohne weiteres entscheiden. Diese Frage ist nur für Differentialgleichungen zweiter Ordnung in voller Allgemeinheit geklärt [5]. Der folgende Abschnitt 2 enthält diesbezüglich einige Beiträge für Gleichungen beliebiger Ordnung.

Ist der Koeffizient der höchsten Ableitung in (1, 01) nicht $\equiv 1$, sondern ein Polynom $p_0(z)$, so hat die Differentialgleichung auch singuläre Stellen im Endlichen. Für die in $|z| < \infty$ eindeutigen Lösungen, die es dann in Ausnahmefällen geben kann, bestimmen sich die möglichen Wachstumsordnungen auf gleiche Weise wie oben. Wir beschränken uns jedoch weiterhin auf Gleichungen mit $p_0(z) \equiv 1$. Die Aussagen des folgenden Abschnitts 2 darüber, welche Ordnungen wirklich angenommen werden, lassen sich z. T. einfach übertragen auf solche Gleichungen mit $p_0(z) \not\equiv 1$, deren Lösungen sämtlich eindeutig sind. Doch wird hierauf nicht weiter eingegangen.

Der (Nevanlinnasche) Defekt [3]

$$\delta(w, a) = \varliminf_{r \to \infty} \frac{m(r, a)}{T(r, w)} \tag{1, 14}$$

der Stellensorte $w = a$ ist bei den ganzen transzendenten Lösungen von (1, 01) gleich Null für alle endlichen $a \neq 0$, [11]. In (1, 14) bedeutet $m(r, a)$ die Schmiegungsfunktion

$$m(r, a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overset{+}{\ln} \left| \frac{1}{w(r \exp i\varphi) - a} \right| d\varphi \tag{1, 15}$$

mit $\overset{+}{\ln} |x| = \operatorname{Max}(\ln |x|, 0)$ und $T(r, w)$ die Charakteristik, die für ganze transzendente Funktionen mit

$$m(r, \infty) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overset{+}{\ln} |w(r \exp i\varphi)| \, d\varphi$$

übereinstimmt. Es bleibt daher für die Integrale von (1, 01) nur der Nullstellendefekt

$$\delta(w, 0) = \varliminf_{r \to \infty} \frac{m(r, 0)}{m(r, \infty)} \tag{1, 16}$$

zu untersuchen. Er liegt zwischen 0 und 1, Grenzen eingeschlossen, und ist im allgemeinen nicht für jedes Integral gleich, sondern z. B. abhängig von Anfangsbedingungen. Dies zeigt schon die Differentialgleichung $w'' + w = 0$; von ihren Lösungen $w = c_1 \exp iz + c_2 \exp(-iz)$ haben nur die partikulären mit $c_1 = 0$ oder $c_2 = 0$ den Defekt 1, jede davon linear unabhängige ($c_1 c_2 \neq 0$) den Defekt 0.

Das Ziel dieser Untersuchung ist es, auf dem Wege über asymptotische Integration oder eine Transformation der Differentialgleichungen weitergehende Aussagen über das Anwachsen und die Nullstellenverteilung der Lösungen in einigen konkreten Fällen zu gewinnen.

2. Zwei Sätze über die Wachstumsordnungen.

Besteht der fallende Teil des Polygons im Puiseux-Diagramm aus mindestens zwei Strecken, so sind mehrere Wachstumsordnungen möglich. Die größte Ordnung ist gleich der Neigung der ersten Strecke und zwar

$$\lambda_{\max} = 1 + \frac{k_\mu}{\mu}, \tag{2, 01}$$

wobei

$$\frac{k_\mu}{\mu} = \operatorname*{Max}_{j=1}^{m} \frac{k_j}{j} \tag{2, 02}$$

und $\mu < m$. Nach der Bezeichnung von Poincaré [6], [7], [2] hat dann die Differentialgleichung im Unendlichen eine Unbestimmtheitsstelle vom Range $1 + \frac{k_\mu}{\mu} = \lambda_{\max}$.

Satz 1. *Das stärkste Wachstum wird stets angenommen, d. h. es gibt eine ganze transzendente Lösung vom größten Typus t zur größtmöglichen Ordnung $\lambda_{\max}$.*

Beweis. Nehmen wir den Fall $\mu = 1$, $\lambda_{\max} = 1 + k_1$ vorweg, in dem die Behauptung sogleich daraus folgt, daß der Wronski-Determinante

$$W = \text{const} \cdot \exp\left(-\int^z p_1(\eta)\, d\eta\right) \tag{2, 03}$$

die Wachstumsordnung $1 + k_1$ zukommt. Es können daher nicht alle Funktionen eines Fundamentalsystems von kleinerer Ordnung anwachsen. Der Typus zur Ordnung $\lambda_{\max}$ ist in diesem Falle eindeutig.

Es sei jetzt also $\mu \neq 1$. Gibt es mehrere Zahlen μ, für die (2, 02) erfüllt ist, so wählen wir die größte unter ihnen. Die mit $\lambda = \lambda_{\max}$ gebildete algebraische Gleichung (1, 10) für die Konstante B ist dann vom Grade μ, es kommen darin nur Potenzen B^h mit Exponenten h vor, für die $k_h/h = k_\mu/\mu$ erfüllt ist. Sei B_1 eine Wurzel dieser Gleichung von kleinstem Absolutbetrag. Es bedeutet keine Einschränkung der Allgemeinheit, B_1 positiv reell anzunehmen. Zu den asymptotischen Richtungen gehört dann $\operatorname{arc} z = 0$. Es soll gezeigt werden, daß eine ganze transzendente Lösung existiert mit

$$\ln M(r) = \ln |w(\zeta)| = \frac{|\zeta|^{\lambda_{\max}}}{\lambda_{\max} B_1}[1 + \varepsilon(r)] \quad \text{und} \quad \operatorname{arc} \zeta \to 0 \quad \text{für} \quad r \to \infty.$$

Dies wird zurückgeführt auf eine entsprechende, seit Poincaré bekannte Aussage über die Thoméschen „Normalreihen". Zunächst werde k_μ/μ und damit der Rang ganzzahlig angenommen. Dann gibt es nach [6] im allgemeinen Ausdrücke der Form (Normalreihen)

$$\exp Q(z) \cdot z^\varrho \mathfrak{P}\left(\frac{1}{z}\right), \tag{2, 04}$$

die für festes $\operatorname{arc} z$ gewisse Integrale der Differentialgleichung asymptotisch darstellen. Dabei bedeutet $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{z}\right)$ eine im allgemeinen divergente Potenzreihe in $\frac{1}{z}$, ϱ eine Konstante und $Q(z)$ ein Polynom von einem Grade $\leq \lambda_{\max}$. Für mindestens eine der Normalreihen ist $Q(z)$ vom Grade $\lambda_{\max}$; der Koeffizient C der höchsten Potenz in $Q(z)$ ist eine Wurzel der algebraischen Gleichung („charakteristischen Gleichung")

$$(C\lambda_{\max})^\mu + \sum_{(h)} a_h (C\lambda_{\max})^{\mu - h} = 0. \tag{2, 05}$$

Hierin ist nur über diejenigen h zu summieren, für die $\frac{k_h}{h} = \frac{k_\mu}{\mu}$ ist. Die größte dieser Zahlen h ist nach Voraussetzung $= \mu$. Setzt man $C\lambda_{\max} = \frac{1}{B}$, so geht (2, 05) nach Multiplikation

mit B'' über in (1, 08). Mit B_1 ist also auch die (bzw. eine) Wurzel größten Betrages von (2, 05) positiv reell. Handelt es sich um eine mehrfache Wurzel, so kann der Fall eintreten, daß in Q und $\mathfrak{P}$ Potenzen von $z^{1/n}$ bzw. $\frac{1}{z^{1/n}}$ mit einem ganzzahligen n vorkommen [1] („subnormale Reihe"). Nach [1], [6], [8] gibt es jedenfalls mindestens eine Normalreihe (bzw. subnormale Reihe)

$$\exp\left\{\frac{z^{\lambda_{\max}}}{B_1\,\lambda_{\max}} + \cdots\right\} \cdot z^{\varrho}\,\mathfrak{P}\left(\frac{1}{z^{1/n}}\right),$$

die eine Lösung w der Differentialgleichung für große r asymptotisch darstellt; in einem Winkelraum um arc $z = 0$ gilt dafür

$$\ln|w| = \frac{z^{\lambda_{\max}}}{B_1\,\lambda_{\max}}\{1 + \varepsilon(r)\}. \tag{2, 06}$$

Daraus folgt aber gerade die Behauptung.

Es bleiben die Fälle zu untersuchen, bei denen k_μ/μ nicht ganzzahlig ist. Nach Kürzen bleibe im Nenner die Zahl q. Dann führe man durch

$$z = \xi^q$$

eine neue unabhängige Variable ein. Die Differentialgleichung geht dabei über in eine Gleichung

$$\begin{aligned}\frac{d^m w}{d\xi^m} + \frac{d^{m-1}w}{d\xi^{m-1}}\, q a_1 \xi^{K_1}\left(1 + \mathfrak{O}_1\left(\frac{1}{\xi}\right)\right) + \frac{d^{m-2}w}{d\xi^{m-2}}\, q^2 \tilde{a}_2 \xi^{K_2}\left(1 + \mathfrak{O}_2\left(\frac{1}{\xi}\right)\right)\\ + \cdots + \frac{dw}{d\xi}\, q^{m-1}\tilde{a}_{m-1}\xi^{K_{m-1}}\left(1 + \mathfrak{O}_{m-1}\left(\frac{1}{\xi}\right)\right) + w q^m p_m(\xi^q)\,\xi^{qm-m} = 0,\end{aligned} \tag{2, 07}$$

wobei

$$\begin{aligned} K_1 &= q(k_1 + 1) - 1,\\ K_j &= \operatorname*{Max}_{i \leq j}\,[q(k_i + i) - j], \quad j = 2, \ldots, m-1,\end{aligned} \tag{2, 08}$$

$\mathfrak{O}_j$ gewisse Reihen in $\frac{1}{\xi}$, die für $\xi \to \infty$ verschwinden, und $\tilde{a}_2, \tilde{a}_3, \ldots, \tilde{a}_{m-1}$ gewisse Konstanten sind, die man allgemein durch Lösung von linearen Differenzengleichungen erhalten kann. Dies ist für unsere Zwecke aber nicht erforderlich. Denn aus Gleichung (2, 08) folgt

$$\operatorname{Max}\frac{K_j}{j} = \frac{K_\mu}{\mu} = q\left(\frac{k_\mu}{\mu} + 1\right) - 1 \tag{2, 09}$$

mit demselben μ wie oben in Gleichung (2, 02), und $\frac{K_h}{h} = \frac{K_\mu}{\mu}$ wird für die gleichen Zahlen h erfüllt wie $\frac{k_h}{h} = \frac{k_\mu}{\mu}$. Für diese h, für die $2 \leq h \leq m$ gilt, ist

$$\tilde{a}_h = a_h.$$

Die neue Differentialgleichung ist daher in ξ vom Range $1 + \frac{K_\mu}{\mu} = q\left(1 + \frac{k_\mu}{\mu}\right)$; im Exponenten $Q(\xi)$ der Normalreihe

$$\exp Q(\xi)\,\xi^{\varrho}\,\mathfrak{P}\left(\frac{1}{\xi}\right) = \exp Q\left(z^{\frac{1}{q}}\right) z^{\frac{\varrho}{q}}\,\mathfrak{P}\left(\frac{1}{z^{1/q}}\right) \tag{2, 10}$$

(bzw. eventuell subnormalen Reihe, in der Potenzen $\xi^{1/n}$ und $z^{1/(nq)}$ auftreten) genügt der Koeffizient der höchsten Potenz $\xi^{\varrho(1+k_\mu/\mu)}$ wieder der Gleichung (2, 05). Eine solche Normal- (bzw. subnormale) Reihe gibt es unbeschadet der Tatsache, daß die Koeffizienten in

(2, 07) keine Polynome mehr sind. Auf gleiche Weise wie oben folgt daher auch jetzt die Existenz einer Lösung w mit dem in (2,06) ausgedrückten Verhalten für $r \to \infty$ in einem die positiv-reelle z-Achse enthaltenden Winkelraum. Damit ist Satz 1 bewiesen.

Es lassen sich gegebenenfalls (sofern es Zahlen B verschiedenen Betrages gibt) Normalreihen aufstellen, bei denen der Koeffizient der höchsten Potenz von z dem Betrage nach mit einem kleineren Typus übereinstimmt. Wegen der Divergenz einer solchen Reihe (im allgemeinen) wird aber dadurch nicht in einer vollen Umgebung des Punktes ∞ ein Integral asymptotisch dargestellt. Es verbleiben Winkelräume, in denen die Lösung doch das stärkste Anwachsen aufweisen könnte. Daher kann aus diesen Betrachtungen nicht gefolgert werden, daß auch die kleineren Typenwerte zur Ordnung $\lambda_{\max}$ auftreten müssen. Für eine Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$w'' + p_1(z)\, w' + p_2(z)\, w = 0$$

mit $k_1 = \frac{k_2}{2}$ gibt es zur Ordnung $1 + k_1 = 1 + \frac{k_2}{2}$ zwei Werte des Typus, wenn die Gleichung

$$a_2 B^2 + a_1 B + 1 = 0$$

Wurzeln verschiedenen Betrages hat; der kleinere Typus tritt nur in angebbaren Ausnahmefällen auf [5].

Statt der positiv-reellen Achse hätte beim Beweis zu Satz 1 auch irgendeine andere der asymptotischen Richtungen gewählt werden können. Es gibt daher zu jeder der Richtungen φ_ν (Gleichung (1, 13) mit $B = B_1$; $\nu = 0, 1, \ldots, p-1$) ein Integral der Differentialgleichung, für das die Beziehung (2, 06) in einem Winkelraum um diese Richtung erfüllt ist. Diese Integrale brauchen nicht alle unabhängig zu sein; über die Anzahl linear unabhängiger Lösungen des stärksten Wachstums läßt sich daher auf diese Weise über Satz 1 hinaus nichts aussagen.

Hat die Differentialgleichung (1, 01) ein Fundamentalsystem von ganzen transzendenten Lösungen mit übereinstimmender Wachstumsordnung λ, dann muß in allen Fällen $\lambda = \lambda_{\max}$ sein und somit $k_j \leqq j(\lambda - 1)$ für $j = 1, 2, \ldots, m$. Diese Ungleichung hatte H. Wittich [10] unter der Voraussetzung bewiesen, daß die m Grenzwerte $n(r)/\zeta^\lambda$, gebildet in den asymptotischen Richtungen für die m Funktionen des Fundamentalsystems, alle verschieden sind, eine Einschränkung, die $\lambda = 1 + \frac{k_m}{m}$ nach sich zieht.

Die bisherigen Betrachtungen betrafen die transzendenten Lösungen der größten Wachstumsordnung. Bei Differentialgleichungen zweiter Ordnung konnte in einer früheren Arbeit [5] gezeigt werden, daß die für $\frac{k_2}{2} < k_1 \leqq k_2$ neben $\lambda_{\max} = 1 + k_1$ mögliche kleinere Ordnung $1 + k_2 - k_1$ im allgemeinen nicht angenommen wird, sondern nur dann, wenn eine zugeordnete Differentialgleichung Polynomlösungen hat. Dieses Ergebnis kann nicht dahingehend verallgemeinert werden, daß bei Differentialgleichungen beliebiger Ordnung m alle kleineren Wachstumsordnungen auszuschließen wären; doch gilt der folgende

Satz 2. *Der fallende Teil des Puiseux-Diagramms enthalte die Strecke mit den Eckpunkten* $(m-1, \alpha_{m-1})$ *und* (m, α_m). *Die Differentialgleichung* (1, 01) *hat dann keine ganze transzendente Lösung von der zugehörigen (kleinsten) Wachstumsordnung* $\lambda = 1 + k_m - k_{m-1}$ *außer für spezielle Koeffizienten; im letzteren Falle ist eine solche Lösung stets von der Form* $P_1(z) \exp\{Q_1(z)\}$ *mit zwei Polynomen* P_1 *und* $Q_1 = -\frac{a_m z^\lambda}{a_{m-1}\lambda} + \cdots$.

Beweis. Die Voraussetzung über das Puiseux-Diagramm ist nur erfüllt, wenn

$$k_{m-1} \leqq k_m = k < \frac{m}{m-1} k_{m-1} \tag{2, 11}$$

und wenn für $1 \leqq j \leqq m-2$

$$\frac{k_{m-1} - k_j}{m-1-j} > k_m - k_{m-1} \tag{2, 12}$$

ist (vgl. Fig. 3).

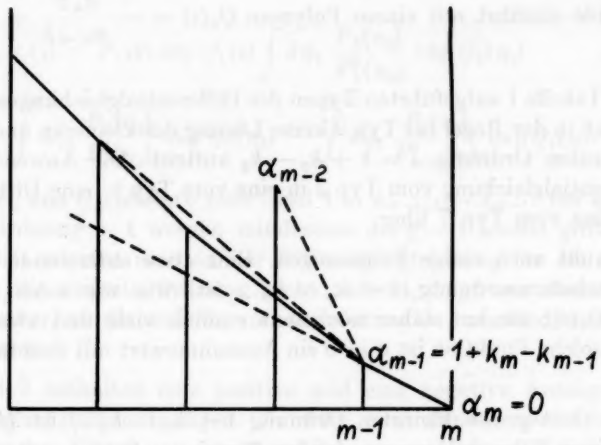

Fig. 3.

Zum Beweis von Satz 2 kann man ähnlich wie in [5] vorgehen. Man substituiert

$$w(z) = v(z) \exp\left(-\frac{a_m z^\lambda}{a_{m-1}\lambda}\right) \tag{2, 13}$$

und erhält in v eine Differentialgleichung

$$v^{(m)} + \tilde{p}_1 v^{(m-1)} + \cdots + \tilde{p}_{m-1} v' + \tilde{p}_m v = 0 \tag{2, 14}$$

mit neuen Polynomen $\tilde{p}_j(z)$. Über deren Grade $\tilde{k}_j$ läßt sich Folgendes aussagen: Es ist

$$\tilde{k}_m \overset{(\leqq)}{} \operatorname{Max}\{k_m - 1,\ k_j + (m-j)(k_m - k_{m-1})\}$$
$$\tilde{k}_j \overset{(\leqq)}{} \operatorname{Max}\{k_j,\ k_i + (j-i)(k_m - k_{m-1})\}$$

mit $i \leqq j$ und $j = 2, 3, \ldots, m-2$. Das Kleiner-Zeichen in einer dieser Beziehungen kommt nur in Sonderfällen in Betracht, deren Diskussion sich hier erübrigt. Zufolge der Ungleichungen (2, 12) ist

$$\tilde{k}_m \overset{(\leqq)}{} k_m - 1, \quad \tilde{k}_{m-1} = k_{m-1}, \tag{2, 15}$$

und (2, 12) gilt auch für die Grade der neuen Polynome. Denn es ist

$$\frac{\tilde{k}_{m-1} - \tilde{k}_j}{m-1-j} \geqq \operatorname{Min}\left\{\frac{k_{m-1} - k_j}{m-1-j},\ \frac{k_{m-1} - k_j - (m-1-j)(k_m - k_{m-1}) + (m+1-j)(k_m - k_{m-1})}{m-1-j}\right\} > k_m - k_{m-1}.$$

Somit entsteht bei der Anwendung der Substitution (2, 13) eine Differentialgleichung, für die bei sonst gleichen Verhältnissen der Grad des letzten Polynoms um mindestens 1 erniedrigt ist. Wendet man dieses Verfahren mehrfach an, so muß man nach endlich

vielen Schritten zu einer Differentialgleichung gelangt sein, bei der der Grad des vorletzten Polynoms den des letzten übertrifft, und für die nur Wachstumsordnungen $> 1 + k_m - k_{m-1}$ möglich sind. Dann und nur dann, wenn diese Differentialgleichung eine Polynomlösung $P_1(z)$ hat, gibt es ein Integral der ursprünglichen Differentialgleichung mit $\lambda = 1 + k_m - k_{m-1}$. Denn der Übergang wird dadurch bewerkstelligt, daß man statt w durch einen Ausdruck

$$w \exp\{-Q_1(z)\} \tag{2, 16}$$

eine neue Variable einführt mit einem Polynom $Q_1(z) = -\dfrac{a_m z^\lambda}{a_{m-1}\lambda} + \cdots$. Damit ist Satz 2 bewiesen.

Für die in Tabelle I aufgeführten Typen der Differentialgleichungen dritter Ordnung besagt Satz 2, daß in der Regel bei Typ 2 keine Lösung der kleineren und bei Typ 3 keine Lösung der kleinsten Ordnung $\lambda = 1 + k_3 - k_2$ auftritt. Die Anwendung von (2, 16) führt eine Differentialgleichung vom Typ 2 in eine vom Typ 5, eine Differentialgleichung vom Typ 6 in eine vom Typ 7 über.

Satz 2 erlaubt noch einige Folgerungen. Eine etwa auftretende Lösungsfunktion w_1 mit der Wachstumsordnung $1 + k_m - k_{m-1}$ ist, wie wir sahen, von der Form $w_1 = P_1(z) \exp Q_1(z)$; sie hat daher höchstens endlich viele und zwar einfache Nullstellen. Für eine solche Funktion ist $w = 0$ ein Ausnahmewert mit dem maximalen Defekt $\delta(w, 0) = 1$.

Die Vielfachheit g der kleinsten Ordnung $1 + k_m - k_{m-1}$ ist gleich der Anzahl linear unabhängiger Polynomlösungen der im Beweis zu Satz 2 auftretenden transformierten Differentialgleichung. Tritt die kleinste Ordnung auf, und ist die nächst größere Ordnung gleich $1 + k_{m-1} - k_{m-2}$ (Fall 3 in Tab. I), so wird diese wiederum nur in Sonderfällen angenommen und nur für $g = 1$, wenn es also kein von w_1 linear unabhängiges Integral der kleinsten Ordnung gibt. Bei der Substitution

$$w = w_1 \int^z u(\eta)\, d\eta = P_1 \exp Q_1 \int^z u(\eta)\, d\eta \tag{2, 17}$$

entsteht für u eine Differentialgleichung $(m-1)$-ter Ordnung mit rationalen Koeffizienten, deren Pole nur an Nullstellen von P_1 liegen können. Da die Ausgangs-Differentialgleichung nur ganze Funktionen w zu Integralen hat, ist u eindeutig, d. h. in der ganzen Ebene meromorph mit höchstens endlich vielen Polen, außerdem nicht-rational, denn sonst würde die kleinste Ordnung $1 + k_m - k_{m-1}$ mehrfach angenommen. Die Wachstumsordnung einer Lösung u muß mit einem der von $1 + k_m - k_{m-1}$ verschiedenen für w möglichen Werte übereinstimmen. Durch eine ähnliche Betrachtung wie oben zeigt man, daß eine Funktion u der Ordnung $1 + k_{m-1} - k_{m-2}$ nur dann auftreten kann, wenn eine transformierte Differentialgleichung rationale Lösungen hat. Eine solche Funktion u ist dann von der Form

$$u(z) = \frac{P_2}{P_1^2} \exp Q_2$$

mit zwei Polynomen P_2 und $Q_2 = -\dfrac{a_{m-1} z^{1+k_{m-1}-k_{m-2}}}{a_{m-2}(1 + k_{m-1} - k_{m-2})} + \cdots$. Ihr entspricht nach (2, 17) ein Integral w_2 der Ordnung $1 + k_{m-1} - k_{m-2}$. Eine Folgerung aus diesen Überlegungen ist:

Falls das Polygon im Puiseux-Diagramm aus m verschieden geneigten fallenden Strecken besteht und falls die Differentialgleichung nur ganze transzendente Lösungen

hat, so gibt es im allgemeinen kein Fundamentalsystem von Lösungen mit lauter verschiedenen Wachstumsordnungen. Diese Ordnungen wären, der Größe nach geordnet,

$$1 + k_1,\ 1 + k_2 - k_1, \ldots, 1 + k_{m-1} - k_{m-2},\ 1 + k_m - k_{m-1}$$

und müßten jede genau einfach angenommen werden. Ist dies für die kleinste Ordnung erfüllt, so ist eine Lösung der nächst größeren Ordnung nur unter weiteren speziellen Bedingungen hinsichtlich der Koeffizienten vorhanden usf. Hat die Differentialgleichung ein Fundamentalsystem mit lauter verschiedenen Ordnungen, so läßt es sich schreiben als

$$(2.18)\qquad w_j(z) = P_1(z) \exp Q_1(z) \int^z d\eta_2 \frac{P_2(\eta_2)}{P_1^2(\eta_2)} \exp Q_2(\eta_2)$$
$$\cdot \int^{\eta_2} d\eta_3 \frac{P_3(\eta_3)}{P_2^2(\eta_3)} \exp Q_3(\eta_3) \cdots \int^{\eta_{j-1}} d\eta_j \frac{P_j(\eta_j)}{P_{j-1}^2(\eta_j)} \exp Q_j(\eta_j) \quad (j = 1, 2, \ldots, m)$$

mit Polynomen P_j und Q_j, letztere vom Grad $1 + k_{m-j+1} - k_{m-j}$. Bei einer Vielfachheit g der kleinsten Ordnung > 1 werden mindestens die $g - 1$ nächst größeren Ordnungen übersprungen. Dies erkennt man an der Differentialgleichung für die restlichen $m - g$ Integrale. Wenn die kleinste Ordnung nicht auftritt, folgt aus diesen Betrachtungen jedoch nichts darüber, ob die anderen von der maximalen verschiedenen Ordnungen vorkommen oder nicht.

Satz 1 und 2 enthalten eine positive und eine negative Aussage über das Auftreten gewisser Wachstumsordnungen. Es wäre nun wünschenswert, solche Kenntnis auch über die übrigen λ-Werte zu erhalten. Hier versagen aber die bisher angewendeten Methoden. Daß eine Tranformation nach Art von (2, 16) nicht allgemein zum Ziel führt, kann man sich an den Differentialgleichungen dritter Ordnung klarmachen. Hier sind noch die Fälle 3 und 6 hinsichtlich $\lambda = 1 + k_2 - k_1$, die Fälle 4 und 8 hinsichtlich $\lambda = 1 + \frac{k_3 - k_1}{2}$ ungeklärt. Setzt man z. B. für eine Gleichung vom Typ 6

$$w = v \exp f$$

mit

$$f(z) = -\frac{a_2}{a_1} \frac{z^{1+k_2-k_1}}{1 + k_2 - k_1},$$

so entsteht für $k_2 = k_1$ wieder eine Differentialgleichung vom Typ 6, ohne daß k_2 erniedrigt würde; für $k_2 > k_1$ kommt man zu einer Gleichung vom Typ 3. Versucht man aber durch

$$w = v \exp \frac{f}{2}$$

den Grad k_2 abzubauen, so findet man für die transformierte Gleichung

$$\tilde{k} = \tilde{k}_3 = 2k_2 - k_1 \geqq k_2 > \tilde{k}_2,\ \ \tilde{k}_1 = k_1,$$

d. h. es entsteht eine Differentialgleichung des Typs 4 mit $\tilde{k}_1 + \tilde{k}_3 > 2\tilde{k}_2$, und damit ist die Frage nach wie vor unentschieden. Daß in anderen als den in Satz 2 erfaßten Fällen die kleinere Wachstumsordnung sogar notwendig auftreten muß, zeigen z. B. die Differentialgleichungen dritter Ordnung (s. Tab. I):

Typ 4 mit $k_1 = k_3 = 1$, $k_2 \leqq 1$;
Typ 8 mit $k_1 = 1$, $k_2 = k_3 = 0$;
Typ 6 mit $k_1 = k_2 = 1$, $k_3 = 0$.

Haben sie ein Fundamentalsystem von ganzen *transzendenten* Funktionen, so können nur zwei linear unabhängige Lösungen mit der größeren Ordnung vorhanden sein und es muß eine Lösung von der kleineren geben.

Ähnlichen Gedankengängen wie in [5] folgend, kann man aus Satz 2 auch eine Aussage über Werte des Typus t, siehe (1, 03), gewinnen, dann nämlich, wenn $\frac{k_m}{m}$ ganzzahlig und $\geqq \frac{k_j}{j}$ $(j = 1, 2, \ldots, m-1)$ ist. In diesem Falle sind alle Lösungen von der Ordnung $1 + \frac{k_m}{m}$ und die Gleichung (1, 10) ist vom Grade m. Wir nehmen an, sie habe Wurzeln mit verschiedenen Beträgen und genau eine Wurzel B_m vom *größten* Betrag. Dann gibt es im allgemeinen keine Lösung des kleinsten Typus $t = \frac{1/|B_m|}{1 + \frac{k_m}{m}}$ zur Ordnung $1 + \frac{k_m}{m}$. Um dies einzusehen, substituiere man für w

$$w = \omega \exp \frac{z^{1+\frac{k_m}{m}}}{B_m\left(1 + \frac{k_m}{m}\right)}. \tag{2, 21}$$

Dabei geht die Differentialgleichung (1, 01) über in eine Differentialgleichung der gleichen Gestalt in ω; die darin auftretenden Polynome $\hat{p}_j$ haben Grade $\hat{k}_j \leqq \frac{j}{m} k_m$ für $j = 1, 2, \ldots, m-1$. Der Grad $\hat{k}_m$ des Polynoms bei ω ist $< k_m$ auf Grund von (1, 10). Der Koeffizient der höchsten Potenz $z^{\frac{m-1}{m} k_m}$ von $\hat{p}_{m-1}$ lautet

$$B_m^{-m}[m B_m + \sum_{(h)} (m-h)\, a_h B_m^{h+1}],$$

wo über diejenigen h zwischen 1 und $m-1$ zu summieren ist, für die $\frac{k_h}{h} = \frac{k_m}{m}$ ist. Dieser Ausdruck ist aber $\neq 0$ auf Grund der Annahme, daß A_m einfache Wurzel von (1, 10) ist; $\hat{p}_{m-1}$ ist also wirklich vom Grade $\frac{m-1}{m} k_m$. Die entstehende Differentialgleichung in ω erfüllt damit die Voraussetzungen von Satz 2. Für ihre Lösungen kommt im allgemeinen nur die Ordnung $1 + \frac{\hat{k}_{m-1}}{m-1} = 1 + \frac{k_m}{m}$ in Frage mit Werten $> \frac{1/|B_m|}{1 + \frac{k_m}{m}}$ des Typus. Dann und nur dann, wenn die Differentialgleichung in ω auch eine Lösung der kleineren Ordnung hat, gibt es eine Lösung w vom Typus $\frac{1/|B_m|}{1 + \frac{k_m}{m}}$ zur Ordnung $1 + \frac{k_m}{m}$. Für eine solche, in Ausnahmefällen auftretende Lösung, gilt dann $\delta(w, 0) = 1$.

Ein Fundamentalsystem mit m verschiedenen Werten des Typus zur gleichen Ordnung $\lambda = 1 + \frac{k_m}{m}$ ist wieder von der Gestalt (2, 18). Einen Sonderfall bildet die Differentialgleichung

$$w^{(m)} + a_1 z^{\lambda-1} w^{(m-1)} + a_2 z^{2\lambda-2} w^{(m-2)} + \cdots + a_m z^{m\lambda-m} w = 0;$$

einige der a_j $(j \neq m)$ können $= 0$ sein. Wenn dazu die Gleichung (1, 10) nur einfache Wurzeln B_j hat, gibt es ein Fundamentalsystem

$$w_j = \exp Q_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, m),$$

wobei $Q_j = \dfrac{z^\lambda}{B_j \lambda} + \cdots$ ist (siehe etwa [7] S. 339).

Weist eine Differentialgleichung, die die Voraussetzungen des Satzes 2 bzw. die zuvor erwähnten erfüllt, ein Integral der kleinsten Ordnung bzw. des kleinsten Typus auf, so kann man über den Defekt auch der übrigen Lösungen einige Angaben machen. Der folgende Abschnitt behandelt in dieser Hinsicht vornehmlich Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

3. Über den Nullstellendefekt der Lösungen von Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

Von den Differentialgleichungen (1, 01) zweiter Ordnung

$$(3, 01) \qquad \begin{aligned} &w''(z) + p_1(z)\, w'(z) + p_2(z)\, w(z) = 0, \\ &p_1(z) = a_1 z^{k_1} + \cdots, \; p_2(z) = a_2 z^{k_2} + \cdots, \end{aligned}$$

betrifft Satz 2 solche mit $\dfrac{k_2}{2} < k_1 \leqq k_2$. Mögliche Wachstumsordnungen sind

$$\lambda_2 = 1 + k_1 \quad \text{und} \quad \lambda_1 = 1 + k_2 - k_1.$$

Nach Satz 2 bzw. [5] tritt λ_1 nur in integrablen Ausnahmefällen auf; ein Fundamentalsystem ist dann

$$(3, 02) \qquad \begin{aligned} w_1(z) &= P_1(z) \exp Q_1(z), \\ w_2(z) &= w_1(z)\, g(z) \end{aligned}$$

mit

$$(3, 03) \qquad g(z) = \int_{z_0}^{z} \frac{\exp\left(-\int_0^\eta p_1(t)\, dt\right)}{w_1^2(\eta)}\, d\eta = \int_{z_0}^{z} \frac{\exp Q_2(\eta)}{P_1^2(\eta)}\, d\eta$$

und Polynomen P_1,

$$(3, 04) \qquad Q_1 = -\frac{a_2}{a_1} \frac{z^{1+k_2-k_1}}{1 + k_2 - k_1} + \cdots$$

und

$$(3, 05) \qquad Q_2 = -\int_0^z p_1(\eta)\, d\eta - 2Q_1(z) = -\frac{a_1}{1 + k_1} z^{1+k_1} + \cdots.$$

Der Integrand in (3, 03) hat an den Nullstellen von P_1 zweifache Pole mit dem Residuum Null. Wir können daher z_0 und den Integrationsweg, solange er nur die Pole vermeidet, beliebig wählen, etwa $z_0 > 0$ und dem Betrage nach größer als alle Nullstellen von P_1; für $|z| > z_0$ kann der Integrationsweg z. B. aus einem Bogenstück des Kreises $r = z_0$ und einem Halbstrahl $\operatorname{arc} z = \text{const}$ zusammengesetzt werden. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann $a_1 > 0$ angenommen werden. In den Winkelräumen W_μ

$$(3, 06) \qquad \left| \operatorname{arc} z - \frac{\mu\pi}{1 + k_1} \right| < \frac{\pi}{2(1 + k_1)} \qquad (\mu = 0, 1, \ldots, 1 + 2k_1)$$

geht der Integrand in (3, 03) gegen Unendlich bzw. gegen Null, je nachdem μ ungerade oder gerade ist. Durch partielle Integration folgt in $W_{2\nu+1}$ $(\nu = 0, 1, \ldots, k_1)$

$$g(z) = \frac{\exp Q_2(z)}{Q_2'(z)\, P_1^2(z)}\,(1 + \varepsilon(r)), \tag{3, 07}$$

und in $W_{2\nu}$

$$g(z) = g_\nu + \frac{\exp Q_2(z)}{Q_2'(z)\, P_1^2(z)}\,(1 + \varepsilon(r)), \tag{3, 08}$$

wo $\varepsilon(r) \to 0$ für $r = |z| \to \infty$ in W_μ und

$$g_\nu = \int_{z_\nu}^{\infty} \frac{\exp Q_2(z)}{P_1^2(z)}\, dz. \tag{3, 09}$$

In $W_{2\nu}$ strebt g also gegen den endlichen Zielwert g_ν und $[g(z) - g_\nu]^{-1}$ wächst dort mit der Ordnung $1 + k_1$.

Jede Lösung

$$w = c_1 w_1 + c_2 w_2 = w_1(c_1 + c_2 g) \tag{3, 10}$$

mit $c_2 \neq 0$ hat die Wachstumsordnung $1 + k_1$. In den Winkelräumen U_σ

$$\left|\arg z - \frac{\sigma\pi - \arg a_2}{1 + k_2 - k_1}\right| < \frac{\pi}{2(1 + k_2 - k_1)} \qquad (\sigma = 0, 1, \ldots, 1 + 2(k_2 - k_1)) \tag{3, 11}$$

strebt $w_1 \to 0$ bzw. $\to \infty$ je nachdem ob $\sigma = 2\tau$ oder $\sigma = 2\tau + 1$ $(\tau = 0, 1, \ldots, k_2 - k_1)$ ist. Es sei zunächst $-\frac{c_1}{c_2}$ verschieden von allen g_ν. In einem Sektor, der Durchschnitt eines Winkelraumes $W_{2\nu}$ mit einem Winkelraum $U_{2\tau}$ ist, geht $\frac{1}{|w|} \to \infty$ mit $z \to \infty$ wie $\frac{1}{|w_1|}$. Der Anteil eines solchen Sektors in der Schmiegungsfunktion $m(r, 0)$ geht jedoch schwächer $\to \infty$ als $m(r, \infty) = \frac{a_1}{\pi} r^{1+k_1}(1 + \varepsilon(r))$, so daß diese Sektoren keinen endlichen Beitrag zu $\delta(w, 0)$ bringen. Außerhalb dieser Sektoren strebt $|w| \to \infty$. Daher ist

$$\delta(w, 0) = 0.$$

Gilt nun $-\frac{c_1}{c_2} = g_\nu$ für irgendein ν, so wächst in jedem Winkelraum $W_{2\nu}$, wo g den Zielwert g_ν hat, $\frac{1}{|w|}$ so stark $\to \infty$ wie $|w|$ in den Winkelräumen $W_{2\nu+1}$. Jeder solche Winkelraum $W_{2\nu}$ bringt zu $\delta(w, 0)$ einen Beitrag $\frac{1}{\pi(1 + k_1)}$. Sind die Zielwerte g_ν $(\nu = 0, 1, \ldots, k_1)$ alle verschieden, so hat daher

$$w = c_1\left(w_1 - \frac{w_2}{g_\nu}\right)$$

den Nullstellendefekt

$$\delta(w, 0) = \frac{1}{1 + k_1}.$$

Fallen mehrere, etwa p, Werte g_ν zusammen, so ist

$$\delta(w, 0) = \frac{p}{1 + k_1}.$$

Es können nicht alle g_ν gleich sein; denn sonst gäbe es zwei linear unabhängige w_1, w_2 mit dem Defekt 1, während für jede andere Lösung $c_1 w_1 + c_2 w_2$ mit $c_1 c_2 \neq 0$ der Defekt $= 0$ ist. Dies kann aber nach einem Ergebnis von H. Wittich [13] bei Differentialgleichungen (3, 01) mit nicht-konstanten Koeffizienten nicht eintreten. Daher ist immer $p < 1 + k_1$. Als Beispiel sei die Differentialgleichung

$$w'' + (a_1 z + b)\, w' + a(a_1 z + b - a)\, w = 0$$

angeführt mit den Lösungen

$$w_1 = \exp(-az), \quad w_2 = \exp(-az) \int_0^z \exp\left[-\frac{a_1}{2}\eta^2 + (2a - b)\,\eta\right] d\eta = w_1 g.$$

Hier ist $a_1 > 0$, a und b beliebig komplex. Die beiden, im allgemeinen komplexen und stets verschiedenen Zielwerte von $g(z)$ betragen

$$g_{0,1} = \left[\pm\sqrt{\frac{\pi}{2a_1}} + \frac{1}{a_1}\int_0^{2a-b} \exp\left(-\frac{\eta^2}{2a_1}\right) d\eta\right] \exp\frac{(2a-b)^2}{2a_1}.$$

Für die Funktionen $w = c_1\left(w_1 - \frac{w_2}{g_0}\right)$ und $w = c_1\left(w_1 - \frac{w_2}{g_1}\right)$ ist der Nullstellendefekt $\delta(w, 0) = \frac{1}{2}$; für jedes andere Integral $w = c_1 w_1 + c_2 w_2$ mit $c_2 \neq 0$ ist $\delta(w, 0) = 0$.

Auf ähnliche Weise erledigen sich Differentialgleichungen (3, 01) mit $k_2 = 2k_1$ und zwei verschiedenen Werten des Typus t zur Ordnung $\lambda = 1 + k_1 = 1 + \frac{k_2}{2}$, wenn sie ein Integral w_1 mit dem schwächeren Wachstum ($t = t_1$) haben. Die Gleichung (1, 10) für B,

$$1 + a_1 B + a_2 B^2 = 0,$$

hat dann Wurzeln B_1, B_2 verschiedenen Betrages; setzen wir für den Augenblick $\frac{1}{\lambda B} = s$, so daß also $|s_1| = t_1 < |s_2| = t_2$ ist, so bestehen wieder die Gleichungen (3, 02), (3, 03), wobei jetzt

$$(3, 12) \quad Q_1(z) = -s_1 z^\lambda + \cdots,$$

$$Q_2(z) = -\int_0^z p_1(\eta)\, d\eta - 2Q_1(z) = -\left(\frac{a_1}{\lambda} + 2s_1\right) z^\lambda + \cdots = -(s_2 - s_1)\, z^\lambda + \cdots.$$

Definiert man die Winkelräume W_μ durch

$$(3, 13) \qquad \left|\arg z - \frac{\mu\pi - \arg(s_2 - s_1)}{\lambda}\right| < \frac{\pi}{2\lambda},$$

so gelten dort die Beziehungen (3, 07) bis (3, 09). In den Winkelräumen V_μ

$$(3, 14) \qquad \left|\arg z - \frac{\mu\pi - \arg s_1}{\lambda}\right| < \frac{\pi}{2\lambda}$$

strebt $w_1 \to 0$ für $\mu = 2\nu$ und $\to \infty$ für $\mu = 2\nu + 1$, ($\nu = 0, 1, \ldots \lambda - 1$). Eine Lösung

$$w = w_1(c_1 + c_2 g)$$

mit $c_2 \neq 0$ hat in $W_{2\nu+1}$ asymptotisch das Verhalten

$$(3, 15) \qquad \ln|w| \sim \operatorname{Re}(-s_2 z^\lambda).$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann $s_2 - s_1 > 0$ angenommen werden. Ist $-\frac{c_1}{c_2}$ verschieden von allen g_ν, so gilt im Durchschnitt von $W_{2\nu}$ und $V_{2\tau+1}$

$$\overset{+}{\ln}\,|w| \sim \overset{+}{\ln}\,|w_1| \sim \operatorname{Re}(-s_1 z^\lambda) \tag{3, 16}$$

und im Durchschnitt von $W_{2\nu}$ und $V_{2\tau}$

$$\overset{+}{\ln}\,\frac{1}{|w|} \sim \ln\frac{1}{|w_1|} \sim \operatorname{Re}(s_1 z^\lambda). \tag{3, 17}$$

Integration über arc $z = \varphi$ liefert

$$m(r, \infty) \sim \frac{r^\lambda}{2\pi}\{2\operatorname{Re} s_2 + |s_1| + \operatorname{Re} s_1\},$$

$$m(r, 0) \sim \frac{r^\lambda}{2\pi}\left\{\operatorname{Re} s_1 + \frac{2(\operatorname{Re} s_1)^2}{|s_1|} - |s_1|\right\}$$

und damit

$$\delta(w, 0) = \frac{\operatorname{Re} s_1 + \frac{2}{|s_1|}(\operatorname{Re} s_1)^2 - |s_1|}{2\operatorname{Re} s_2 + |s_1| + \operatorname{Re} s_1}. \tag{3, 18}$$

Bei festem Betrag von s_1 ist $\delta(w, 0)$ am größten für arc $s_1 =$ arc s_2, und zwar

$$0 < \delta(w, 0) = \frac{t_1}{t_2 + t_1} < \frac{1}{2};$$

für arc $s_1 =$ arc $s_2 + \pi$ ist

$$\delta(w, 0) = 0.$$

Von dem Wert $\frac{c_1}{c_2}$ hängt der Nullstellendefekt nicht ab. Ähnlich verhalten sich Funktionen $c_1 \exp az + c_2 \exp bz$ (siehe [12]). Ist hingegen $-\frac{c_2}{c_1} = g_\varrho$ und sind p der λ Zielwerte gleich g_ν, so gilt in den Winkelräumen $W_{2\nu}$ mit $g_\nu = g_\varrho$

$$\overset{+}{\ln}\,\frac{1}{|w|} \sim \overset{+}{\ln}\,\frac{1}{|w_1(g - g_\varrho)|} \sim \operatorname{Re} s_2 z^\lambda, \tag{3, 19}$$

in den übrigen $(\lambda - p)$ Winkelräumen $W_{2\nu}$ jedoch wieder (3, 16) und (3, 17). Entsprechend erhält man jetzt

$$\delta(w, 0) = \frac{2\frac{p}{\lambda}\operatorname{Re} s_2 + \frac{\lambda - p}{\lambda}\left(\operatorname{Re} s_1 + \frac{2(\operatorname{Re} s_1)^2}{|s_1|} - |s_1|\right)}{2\operatorname{Re} s_2 + \frac{\lambda - p}{\lambda}(|s_1| + \operatorname{Re} s_1)}. \tag{3, 20}$$

Wieder muß $\delta(w, 0) < 1$ bleiben, daher $p < \lambda$. Für arc $s_1 =$ arc s_2 folgt aus (3, 20)

$$\delta(w, 0) = \frac{p + (\lambda - p)\frac{t_1}{t_2}}{\lambda + (\lambda - p)\frac{t_1}{t_2}} < \frac{\lambda}{2\lambda - p},$$

für $\operatorname{arc} s_1 = \operatorname{arc} s_2 + \pi$

$$\delta(w, 0) = \frac{p}{\lambda}.$$

Wird allgemeiner bei einer Differentialgleichung (1, 01) die Wachstumsordnung

$$\lambda_1 = 1 + k_m - k_{m-1}$$

genau einfach angenommen und außerdem die Wachstumsordnung

$$\lambda_2 = 1 + k_{m-1} - k_{m-2},$$

so gibt es nach Abschnitt 2 zwei Integrale

$$w_1 = P_1(z) \exp Q_1(z)$$

und

$$w_2 = P_1(z) \exp Q_1(z) \int_{z_0}^{z} \frac{P_2(\eta)}{P_1^2(\eta)} \exp Q_2(\eta)\, d\eta = w_2 h(z),$$

in denen die Polynome Q_1 und Q_2 vom Grad λ_1 bzw. λ_2 sind. Der Defekt einer Linearkombination

$$w = c_1 w_1 + c_2 w_2$$

($c_2 \neq 0$) ist dann wieder durch die Anzahl p der Zielwerte von $h(z)$ bestimmt, die mit $-c_1/c_2$ übereinstimmen; also

$$\delta(w, 0) = \frac{p}{1 + k_{m-1} - k_{m-2}}.$$

Hier läßt sich aber nicht allgemein auf $\delta(w, 0) < 1$ schließen.

Aus dem Verhalten der Polynome $Q_j(z)$ kann auch der Defekt für die Lösungen einer Differentialgleichung mit einem Fundamentalsystem (2, 18) diskutiert werden. Ebenso lassen sich Aussagen über den Defekt bei Differentialgleichungen machen, deren Lösungen gleiche Wachstumsordnung, jedoch verschiedenen Typus, darunter den kleinsten, haben. Ihr Verhalten entspricht bis zu einem gewissen Grad dem der Exponentialsummen [12]. Doch soll hierauf nicht weiter eingegangen werden.

Literaturverzeichnis.

[1] *É. Fabry*, Sur les intégrales des équations différentielles linéaires à coéfficients rationnels. Thèse, Paris (1885).

[2] *E. L. Ince*, Ordinary differential equations. New York, Dover Publ.

[3] *R. Nevanlinna*, Eindeutige analytische Funktionen, 2. Aufl. Berlin, Springer (1953).

[4] *O. Perron*, Über lineare Differentialgleichungen mit rationalen Koeffizienten. Acta math. **34** (1910), 139—163.

[5] *K. Pöschl*, Zur Frage des Maximalbetrages der Lösungen linearer Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit Polynomkoeffizienten. Math. Ann. **125** (1953), 344—349.

[6] *H. Poincaré*, Sur les intégrales irrégulières des équations linéaires. Acta math. **8** (1886), 295—344.

[7] *L. Schlesinger*, Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen. 1. Band, Leipzig, Teubner (1895).

[8] *W. Sternberg*, Über die asymptotische Intergration von Differentialgleichungen. Math. Ann. **81** (1920), 119 bis 186.

[9] *G. Valiron*, Lectures on the general theory of integral functions. Toulose (1923); Neudr. New York, Chelsea (1949).

[10] *H. Wittich*, Ganze transzendente Lösungen algebraischer Differentialgleichungen a) Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math.-phys. Kl. (1946), 71—73; b) Math. Ann. **122** (1950), 231—234.

[11] *H. Wittich*, Über das Anwachsen der Lösungen linearer Differentialgleichungen. Math. Ann. **124** (1952), 277 bis 288.

[12] *H. Wittich*, Neuere Untersuchungen über eindeutige analytische Funktionen. Ergebnisse der Mathematik, Heft 8, Berlin, Springer (1955).

[13] *H. Wittich*, Defektfreie Lösungen linearer Differentialgleichungen. Arch. d. Math. 7 (1956), 459—464.

Eingegangen 16. November 1956.

On Superposability and Self-Superposability Conditions for Hydrodynamic Equations Based on Continuum. I*).

By *Richard R. Gold* & *M. Z. v. Krzywoblocki.* University of Illinois.

Table of Contents.**)

Introduction

1. 0 The Equations of Hydrodynamics
   - 1. 1 The Equations of Classical Hydrodynamic
   - 1. 2 The Equations of Motion for a Non-Newtonian Fluid
   - 1. 3 The Magneto-Hydrodynamic Equations of Motion
   - 1. 4 Equations of Gas Dynamics

2. 0 Historical Outline of the Problem of Superposability

3. 0 General Constructional Philosophy of Superposability
   - 3. 1 General Remarks
   - 3. 2 The Superposability and Self-Superposability Conditions

4. 0 The Superposability Condition for Incompressible Newtonian Fluids
   - 4. 1 A Closer Inspection of the Work of Previous Authors on the Concept of Superposability
   - 4. 2 The Superposability Condition

5. 0 The Superposability Condition for Incompressible Non-Newtonian Fluids
   - 5. 1 Introduction
   - 5. 2 Some General Observations
   - 5. 3 Boussinesq's Equation of Motion
   - 5. 4 Rivlin's Equation

6. 0 The Superposability Condition for Compressible Newtonian Fluids
   - 6. 1 Basic Equations
   - 6. 2 Solution of the System of Equations Associated with the Equation of Motion for a Compressible Newtonian Flow Applying the Concept of Self-Superposability

7. 0 The Superposability Condition for Compressible Non-Newtonian Fluids
   - 7. 1 Basic Equations
   - 7. 2 Boussinesq's Equation
   - 7. 3 Reiner's Equation

8. 0 The Superposability Condition for the Magneto-Hydrodynamic Equations of Motion
   - 8. 1 Basic Equations
   - 8. 2 The Superposability Condition for an Incompressible Fluid
   - 8. 3 The Superposability Condition for a Compressible Fluid

9. 0 The Potential Equation
   - 9. 1 General Discussion
   - 9. 2 The Proposed Limiting Process for the Solution of the Potential Equation

---

*) This paper was originated from the dissertation submitted by Dr. R. Gold under the direction of the senior author as a partial fulfillment of the requirements toward the Ph. D. degree at the University of Illinois.

**) This table reters to both part I and part II. The latter will be published in the next volume of this Journal.

10. 0 Reduction of the Previously Linearized Equations to Standard Form
10. 1 General Discussion
10. 2 Reduction of the Previously Linearized Equations to Standard Form
11. 0 The Boundary Value Problem
11. 1 General Discussion
11. 2 Remarks on the Linear Equations of Table VI, Chapter 10
12. 0 Overspecified Systems
12. 1 Present Status of the Literature on Overspecified Systems
12. 2 Application of the Discussion of the Preceding Section to the Overspecified Systems of the Paper
13. 0 Several Applications of the Results of this Paper
13. 1 An Illustrative Construction Using the Self-Superposability Condition
13. 2 A Physical Application of Self-Superposability
13. 3 A Second Application of Self-Superposability
13. 4 Complete Systems
14. 0 Conclusions
Appendix A
Bibliography

Introduction.

Due to the nonlinearity of the equations of motion in the theory of fluid dynamics, it is frequently necessary to assume that certain terms, usually the nonlinear terms, are small compared with those retained. Perhaps, equally as often, it is tacitly assumed that two or more distinct motions are linearly superposable and in certain cases both assumptions are made. Examples of these approaches are the analyses of Stokes and Oseen, which make use of the first assumption, and various analyses of Rankine and Lamb, to name a few, who make use of the superposability criterion.

The purpose of this investigation is to examine the basic formal concepts of superposability and self-superposability of nonlinear partial differential equations, in particular those equations of interest in hydrodynamics.

After reviewing the literature on the subject, the fundamental formal (constructional) philosophy of superposability is discussed in chapter 3. In the subsequent chapters, superposability and self-superposability conditions are established for the viscous equations of motion both for incompressible and compressible flows and under the assumption of a Newtonian and Non-Newtonian fluid. In addition these conditions are determined for the equation of motion in magneto-hydrodynamic flow and the potential equation of gas dynamics.

A direct application of the superposability condition for any given nonlinear partial differential equation is in the construction of useful superposable and self-superposable motions. This is discussed quite briefly in the text and its possibilities suggested especially with regard to the work done by previous authors. In particular, however, this paper is concerned with the more general application of utilizing the self-superposability condition to associate with the nonlinear partial differential equation in question a system which can be solved in general in a rigorous manner. Subsequent to determining the self-superposability conditions for the previously mentioned hydrodynamic equations a thorough analysis is made of the solution of this associated system.

In connection with the principal application referred to in the preceding paragraph it was necessary to review the literature on the subjects of boundary value problems and "overspecified" systems, i. e., systems of partial differential equations containing more equations than unknowns. The results of these literature surveys are then applied to the problem at hand introduced by the beforementioned application.

In addition to the previously mentioned general applications, several special applications to the work of Kampé de Fériet and Pohlhausen's solution to the boundary layer are considered in Chapter 13.

Frequently in the analyses of this paper only the surface of the problem is treated and frequently mathematical detail vital to any thorough treatment of a problem is only pointed out rather than being fully explored. The reason for this fact is that this paper is meant to be only a preliminary cursory treatment of the subject designed to establish the fundamental facts. It is hoped that this work will suggest many additional applications and analyses treating the detail omitted out of necessity.

The preliminary remarks vital to the mathematical justification of much of the work of the present paper are quite standard and well known. The basic requirements are, nevertheless, briefly outlined in the following paragraphs for the sake of mathematical completeness.

The mechanics of continuum is fundamentally the Newtonian mechanics. A Newtonian continuum is defined as a finite or infinite closed region of Euclidean three-dimensional space, at each point of which, with the possible exception of isolated sets of points of dimension less than three, there exist the primitive characteristic functions for density, stress tensor, internal energy per unit mass, specific entropy and heat flow vector. Its topological transformation in time into a finite number of other closed regions is governed by the principles of conservation of mass, momentum, and energy. By a motion of a continuum, therefore, we mean a one parameter family of mappings of the particular continuum onto other continua. The time t serves as the real parameter and has the domain of variation $-\infty < t < +\infty$ with the customary arbitrary initial point $t = 0$. The motion is then described by the family of mappings: $x_i = x_i(x_i^0, t)$, $i = 1, 2, 3$, where for convenience sake the coordinates x_1, x_2, x_3 are frequently replaced by x, y, z respectively. By requiring that with the exception of possible singular surfaces, lines or points, the motion will be continuous, we imply that the above transformation be single-valued and thrice continuously differentiable with respect to the space and time variables. In addition, its inverse exists and has these same properties. Continuous motions are therefore implied throughout this paper unless otherwise specifically noted, a fact which lends the necessary regularity to various functions and operations considered. This assumption permits operations of differentiation, for example, and lends rigor where necessary to the solution of differential equations (such applications will be considered in part when they are met in the text).

In general a rectangular cartesian coordinate system is used throughout, such that the customary rules of cartesian tensors will apply. Some of the more fine points of definition and usage so vital to a more general work on the kinematics of vorticity are given in a most desirable fashion in Chapters 1 and 2 of a paper by Truesdell [65].

To illustrate this point, the terms curve, surface, and region imply sufficient smoothness such that the standard existence and uniqueness theorems for the Dirichlet problem, for example, hold for the usual class of boundary values. In view of this, a surface will possess a continuously turning tangent plane and a curve a continuously turning tangent. This may not be the case upon a set of surface measure zero or linear measure zero for the cases of surfaces and curves respectively, but such singularities may be justly disregarded when considering line or surface integrals and avoided when considering differential equations which require greater regularity. More accurate definitions of smoothness and regularity are available in the literature on mathematical analysis but sufficient discussion has been given here for our purposes.

Specific nomenclature is introduced as the terms appear. Although both vector and tensor notation is used throughout this work, an attempt is made at uniformity where possible with convenience paramount. An attempt is also made to use standard nomenclature existing in the literature throughout. It is to be noted that the differential equations to be solved in the various analyses of this paper are summarized in Chapter 10, Table VI, in standard form. Due to the previously mentioned assumptions of regularity of the functions the well-known existence and uniqueness theorems of classical analysis can be applied. We will not attempt to discuss these theorems as they are applied to the equations of Table VI at this time, for they are standard enough to be generally available in classical theory.

1.0 The Equations of Hydrodynamics.

1.1 *The Equations of Classical Hydrodynamics.*

The purpose of this introductory chapter is to present a brief summary of the general equations of hydrodynamics. In particular, those equations which will be of significant interest in this work will be cited for illustrative purposes.

The continuity equations for the cases of incompressible and compressible fluids are given respectively by:

$$(1.1.1,2) \qquad U_{k,k} = 0, \qquad \varrho_{,t} + (\varrho U_i)_{,i} = 0 \qquad (i, k = 1, 2, 3;\ x, y, z),$$

where $U_i = (u, v, w)$ is the velocity vector, $u(x, y, z, t)$, $v(x, y, z, t)$, $w(x, y, z, t)$ are the velocity components at a point $M(x, y, z)$ at time t, $\varrho(x, y, z, t)$ is the density and cartesian tensor notation is utilized. The general equation of motion for a fluid may be written as follows:

$$(1.1.3) \qquad \varrho(U_{i,t} + U_j U_{i,j}) = \varrho F_i + p_{ij,j},$$

where p_{ij} is the stress tensor and F_i are the components X, Y, Z of the external force $F(M, t)$ acting on the fluid per unit mass.

For an incompressible viscous Newtonian fluid the following stress tensor was developed by Navier [39]:[1])

$$(1.1.4) \qquad p_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu\,\varepsilon_{ij},$$

where p is the pressure on the fluid, δ_{ij} is the standard Kronecker delta symbol, μ is the coefficient of shear viscosity assumed constant and ε_{ij} is the strain rate tensor defined as follows:

$$(1.1.5) \qquad \varepsilon_{ij} = \tfrac{1}{2}(U_{i,j} + U_{j,i}).$$

The equation of motion becomes, using equations (1.1.1, 3, 4):

$$(1.1.6) \qquad \varrho(U_{i,t} + U_j U_{i,j}) = \varrho F_i - p_{,i} + \mu U_{i,jj}.$$

For a compressible viscous Newtonian fluid the following stress tensor was developed by Poisson [41] and Stokes [51]:

$$(1.1.7) \qquad p_{ij} = -p\delta_{ij} + \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij},$$

where λ and μ are the two coefficients of viscosity. Using the Stokes relation given by:

$$(1.1.8) \qquad 3\lambda + 2\mu = 0,$$

and equation (1.1.7), the equation of motion becomes:

$$(1.1.9) \qquad \varrho(U_{i,t} + U_j U_{i,j}) = \varrho F_i - p_{,i} - \tfrac{2}{3}(\mu U_{k,k})_{,i} + [\mu(U_{i,j} + U_{j,i})]_{,j},$$

[1]) Numbers in brackets refer to the bibliography which will appear at the end of part II of the paper.

for μ not assumed to be constant, and:

$$(1.1.10)\qquad \varrho(U_{i,t} + U_j U_{i,j}) = \varrho F_i - p_{,i} + \mu[U_{i,jj} + \tfrac{1}{3}(U_{k,k})_{,i}],$$

for μ assumed constant.

For a compressible perfect fluid the energy equation is generally given as follows [23]:

$$(1.1.11)\qquad \varrho C_p(T_{,t} + U_j T_{,j}) = \Phi + (p_{,t} + U_j p_{,j}) + (KT_{,k})_{,k},$$

where T is the temperature, K is the thermal conductivity, C_p is the specific heat at constant pressure assumed constant in (1.1.11) and Φ is the dissipation function. The general expression for Φ is given by:

$$(1.1.12)\qquad \Phi = p_{ij}\varepsilon_{ij}.$$

For a compressible Newtonian fluid, this becomes:

$$(1.1.13)\qquad \Phi = \mu[2u_{,x}^2 + 2v_{,y}^2 + 2w_{,z}^2 + (w_{,y} + v_{,z})^2 + (u_{,z} + w_{,x})^2 + (v_{,x} + u_{,y})^2 - \tfrac{2}{3}(u_{,x} + v_{,y} + w_{,z})].$$

The corresponding equations for incompressible flow can be obtained directly from equations (1.1.11) and (1.1.13).

1.2 *The Equations of Motion for a Non-Newtonian Fluid.*

There are many fluids which do not obey Newton's linear stress-strain relation. Such fluids are generally referred to as Non-Newtonian. The purpose of this section is to present some representative equations of motion for these fluids for illustrative purposes.

Boussinesq's [11] generalized stress tensor for a Non-Newtonian viscous compressible fluid is given by:

$$(1.2.1)\qquad p_{ij} = -p\delta_{ij} + \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} + 2(A - C)(\varepsilon_{ik}\omega_{kj} + \varepsilon_{jk}\omega_{ki}) + B\varepsilon_{kk}\varepsilon_{ij} + 4C\varepsilon_{ik}\varepsilon_{kj} + D\varepsilon_{kk}^2\delta_{ij} - 4EI_2\delta_{ij} + \cdots,$$

where ω_{ij} is the vorticity given by:

$$(1.2.2)\qquad \omega_{ij} = \tfrac{1}{2}(U_{i,j} - U_{j,i}),$$

A, B, C, D, E are second order coefficients of viscosity not specified in form and I_2 is one of the principal invariants of ε_{ij}.

Reiner [45] developed the following expression for the viscous stresses in an isotropic compressible fluid:

$$(1.2.3)\qquad p_{ij} = -p\delta_{ij} + F_0\delta_{ij} + F_1\varepsilon_{ij} + F_2\varepsilon_{ik}\varepsilon_{kj},$$

where F_0, F_1 and F_2 are any functions of the invariants of ε_{ij}, I_1, I_2, I_3.

Rivlin [49] developed an analogous equation for the incompressible case as follows:

$$(1.2.4)\qquad p_{ij} = -p\delta_{ij} + F_1\varepsilon_{ij} + F_2\varepsilon_{ik}\varepsilon_{kj},$$

where F_1 and F_2 are now just functions of I_2 and I_3 and the term $F_0\delta_{ij}$ has been incorporated into the arbitrary pressure term $-p\delta_{ij}$.

1.3 *The Magneto-Hydrodynamic Equations of Motion.*

The electromagnetic phenomena are often described by the modified Navier-Stokes equations developed by Batchelor [7], Chandrasekhar [13] and v. Krzywoblocki [34]. For incompressible flow, the resultant equations are, in vector notation:

$$(1.3.1)\qquad U_{,t} + (U\cdot\operatorname{grad})U = \varrho^{-1}(\varrho_e\vec{E} + \mu\vec{j}\times\vec{H}) - \varrho^{-1}\operatorname{grad} p + \nu\nabla^2 U,$$

where $\vec{H}$ is the magnetic field strength at the point considered, $\vec{E}$ is the electric field strength, ϱ_e is the excess charge density, $\bar{\mu}$ is the magnetic permeability, ν is the kinematic coefficient of viscosity and $\vec{j}$ is the current. Using the magneto-hydrodynamic approximation of Batchelor and Chandrasekhar for incompressible fluids, Batchelor's general equation for $\vec{H}$ and the solenoidal property of vectors $\vec{H}$ and $\vec{U}$, the following system is obtained:

$$U_{i,t} + (U_i U_k - h_i h_k)_{,k} = -\varrho^{-1}(p + \tfrac{1}{2}\varrho\,|h|^2)_{,i} + \nu U_{i,jj}, \tag{1.3.2}$$

$$h_{i,t} + (h_i U_k - U_i h_k)_{,k} = \lambda h_{i,jj}, \tag{1.3.3}$$

$$\vec{h} = [\bar{\mu}(4\pi\varrho)^{-1}]^{1/2}\vec{H}, \quad \lambda = (4\pi\bar{\mu}\sigma)^{-1}, \tag{1.3.4.5}$$

where σ is the conductivity of the fluid.

1.4 *Equations of Gas Dynamics.*

Assuming a steady, inviscid motion with no external forces, the Euler equations and the continuity equation can be combined into one relation in terms of the velocity potential and the speed of sound, a. For an irrotational compressible flow, the familiar nonlinear potential equation is given by [23]:

$$\begin{aligned}[1 - a^{-2}\Phi_{,x}^2]\,\Phi_{,xx} + [1 - a^{-2}\Phi_{,y}^2]\,\Phi_{,yy} + [1 - a^{-2}\Phi_{,z}^2]\,\Phi_{,zz} \\ - 2a^{-2}\Phi_{,x}\Phi_{,y}\Phi_{,xy} - 2a^{-2}\Phi_{,x}\Phi_{,z}\Phi_{,xz} - 2a^{-2}\Phi_{,y}\Phi_{,z}\Phi_{,yz} = 0,\end{aligned} \tag{1.4.1}$$

where the velocity potential function Φ is defined in the usual manner as follows:

$$U_i \equiv \Phi_{,i}. \tag{1.4.2}$$

For incompressible flow $a \to \infty$ and equation (1.4.1) reduces to the standard Laplace equation given by:

$$\nabla^2\Phi \equiv \Phi_{,xx} + \Phi_{,yy} + \Phi_{,zz} = 0. \tag{1.4.3}$$

The stream function equation is of the same structure and will not be treated separately in this work.

It is necessary to point out that the contents of chapter 1 is not intended to constitute a complete historical survey of the available literature on the subjects in question, but rather to present the equations of interest in this paper in some logical sequence.

2.0. Historical Outline of the Problem of Superposability.

In order to solve the nonlinear equations of motion of a viscous incompressible Newtonian fluid Stokes neglected the nonlinear inertia terms for the case of very small Reynold's numbers. Oseen refined this analysis using the method of successive approximations. In either event analyses are quite approximate and are valid only for slow motion. Details of these analyses are available in references [51, 40, 14]. Kampé de Fériet [18, 19] took a big step forward by indicating the necessary and sufficient condition that the nonlinear terms vanish and then solving exactly the resultant system both for steady and nonsteady plane motion. Berker [8] extended the work of Kampé de Fériet beyond the case of plane motion.

Frequently in the literature, use is made of the fact that two or more distinct motions are linearly superposable. This is done with often nothing more than a statement to the effect of assuming the validity of such a superposition such as is found in the work of Rankine. Lamb's book utilizes the concept of superposability often without making mention of it, one such example appearing in its discussion of Oseen's work [36].

The subject of superposability has been investigated by such authors as Ballabh [1—6], Strang [52, 53], Ergun [16, 17] and Prakash [42, 43, 44], for the case of an incompressible viscous Newtonian fluid. The initial work was done by Ballabh in 1940 and later refined and extended by Strang, Ergun, Prakash, Truesdell [65] and Ballabh himself. A summary of the superposability and self-superposability conditions proposed by these authors is given in Table I of Chapter 4. Since the descriptive definition of superposability is standard throughout the works of the above authors and the analyses of this paper it will be summarized here as follows.

Let $U_1 = (u_1, v_1, w_1)$, $U_2 = (u_2, v_2, w_2)$ be two solutions of the hydrodynamic equations of motion of a viscous homogeneous incompressible Newtonian fluid given by:

$$\frac{DU}{Dt} = F - \nabla P + \nu \nabla^2 U, \quad \left(\frac{D}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + U \cdot \nabla\right), \tag{2.0.1}$$

corresponding to given, but not necessarily the same external forces, initial conditions, boundaries and boundary conditions. Let p_1, p_2 be the corresponding pressures, $F_1 = (X_1, Y_1, Z_1), F_2 = (X_2, Y_2, Z_2)$ the corresponding external forces and $\varrho^{-1}\nabla p \equiv \nabla P$. The two solutions are said to be superposable if a pressure function $P_1 + P_2 + \pi$ can be determined so that the fluid moves with the velocity $U_1 + U_2$ under the external forces $F_1 + F_2$ and the pressure function $P_1 + P_2 + \pi$ with the necessary modification in the initial and boundary conditions.

Applications of the concept of superposability were sought by the beforementioned authors by means of utilizing the given conditions to construct superposable and self-superposable motions or by utilizing the self-superposability condition to associate with the original system of equations a system which could be solved rigorously. Some representative examples of these applications are available in Table II of Chapter 4.

The treatment of the subject of superposability to date seems to lack uniformity of approach and of definition a fact which is made clear by Tables I and II of Chapter 4. The primary purpose of this paper is to approach the subject in an orderly and quite general fashion. In this manner, basic definitions are established for the physical case previously considered and extended to additional hydrodynamic equations. Applications can also be sought in a most general fashion and such basic questions as overspecified systems and the formal philosophy of the subject investigated.

3.0 General Constructional Philosophy of Superposability.

3.1 *General Remarks.*

Prior to developing any explicit expressions for superposability and self-superposability in this paper or defining them rigorously for that matter, it would be highly desirable to consider the general formal (constructional) philosophy of the problem. Let us begin by noting that our problem is restricted basically to the equations of hydrodynamics. This consists in general of a system of equations, one of which is a vector equation given by the equation of momentum or motion, and the remainder are scalar equations given by the energy and continuity equations and the equation of state. In general, the vector and scalar quantities may be functions of position, x, y, z and time t.

A typical nonlinear term in the vector equation of motion is characterized by the following form:

$$(ABU_iV_jW_kZ_l)_{,jkl}, \tag{3.1.1}$$

where U_i, V_j, W_k and Z_l are vector quantities and A, B are scalar quantities indicating that we can theoretically have any finite number of scalar multipliers. Note that this term is a first order tensor. A typical nonlinear term in any of the scalar equations is characterized by the following form:

$$(ABU_iV_jW_k)_{,ijk}. \tag{3. 1. 2}$$

This term is just a scalar function or a tensor of order zero. More specifically, we can illustrate the above by considering the left hand sides of the equations of motion and energy for a compressible fluid and introducing the continuity equation into both in the following manner:

The left hand side of the equation of motion is given by:

$$\varrho U_{i,t} + \varrho U_j U_{i,j}. \tag{3. 1. 3}$$

The continuity equation for a compressible flow is:

$$\varrho_{,t} + (\varrho U_j)_{,j} = 0. \tag{3. 1. 4}$$

Multiplying equation (3. 1. 4) by U_i and adding the result to equation (3. 1. 3), we obtain:

$$(\varrho U_i)_{,t} + (\varrho U_i U_j)_{,j}. \tag{3. 1. 5}$$

The nonlinear velocity term $(\varrho U_i U_j)_{,j}$ is of the general form given by equation (3. 1. 1) where ϱ is a scalar function. In a similar manner, the left hand side of the energy equation is:

$$\varrho C_p T_{,t} + \varrho C_p U_i T_{,i}, \tag{3. 1. 6}$$

where C_p is assumed constant.

Multiplying equation (3. 1. 4) by $C_p T$ and adding the result to equation (3. 1. 6) we obtain:

$$(\varrho C_p T)_{,t} + (\varrho C_p U_i T)_{,i}. \tag{3. 1. 7}$$

The term $(\varrho C_p U_i T)_{,i}$ is of the general form given by equation (3. 1. 2) where ϱ, C_p and T are scalar quantities.

In linearizing the equation of motion by introducing the self-superposability condition, we in general have essentially replaced the nonlinear term (a second order tensor) by a scalar function of x, y, z, t. The scalar function being a tensor of order zero, we note that this substitution has been accomplished by means of a reduction in the order of the tensor representing the nonlinear term by two. One might suspect that this is the underlying philosophy for the application of the concept of superposability in linearizing the hydrodynamic equations. In accordance with this, the linearizing of a scalar equation would be accomplished using superposability by reducing by two the order of the tensor representing its nonlinear term. The only scalar equation so considered is the potential equation which is investigated in Chapter 9. In the basic philosophy of tensor calculus, a scalar quantity is independent of the coordinate system used and is therefore an invariant. The scalar quantity is of order zero by definition and there is no means of distinguishing between the various types of scalar functions for example when the number of independent variables is reduced; or we have a scalar constant. It will therefore be necessary to define subclassifications of the tensor of order zero. As previously mentioned, we operate in general in the x, y, z, t space. We will therefore define the scalar function $\pi(x, y, z, t)$ to be of order 0—1, any function π with the number of independent variables reduced to be of order 0—2 and the constant π to be of order 0—3. In this manner, the

vector equations were linearized by reducing the order of the tensor representing the nonlinear velocity terms by two, from second order to order 0—1 and the scalar equations similarly from order 0—1 to 0—3.

The above discussion is restricted to one of the formal (constructional) philosophy of the subject. Intuitively it is suspected that from an analytical viewpoint, the whole problem of linearization might be approached by way of a group transformation from a domain of nonlinearity to one of linearity. The thought is suggested by the work of Morgan [38] where the theory of group transformation was applied to the reduction of the number of independent variables in a differential equation by one, conceivably from a partial to ordinary domain. It is beyond the scope of the present work to consider such fundamental questions and the reader is left with the idea of such a possibility.

3. 2 *The Superposability and Self-Superposability Conditions.*

In developing the definitions of superposability and self-superposability for the equations of motion, it is assumed that all properties of the flow are additive except the pressure through which we introduce the scalar function $\pi(x, y, z, t)$. This function in turn accounts for the physical and mathematical nonlinearity in the analysis.

Although we will later define the conditions of superposability and self-superposability quite rigorously and develop these conditions for various differential equations the following general observations are made at this time. The underlying formal philosophy is to associate with each nonlinear term in the equation of motion a scalar function $\pi(x, y, z, t)$. This is accomplished basically by using the property mentioned at the outset of this section. In the course of the equations of motion to be considered, it will be shown that the self-superposability condition takes on the following form:

$$\pi^{(n)}_{,i} = -(2^m - 2) \quad \textit{(nonlinear term)}, \tag{3. 2. 1}$$

where the superscript n identifies the particular nonlinear term which may contain any number of the variables being considered and m is the sum of the exponents of the variable quantities in the term. The number m may be a positive or negative integer, zero or a positive or negative rational number to list the more important part of its range of definition. Note that for a linear quantity in the equation of motion m would be one and equation (3. 2. 1) would vanish showing the consistency of the equation as π need not be introduced for a linear term.

It is interesting to observe that if the nonlinear term consists of a fraction whose numerator is one degree higher in the combined variables than the denominator, then $m = 1$ also. Such a term is referred to as a pseudo-linear term, for although we can associate a function with it through the superposability condition, the self-superposability condition will fail since equation (3. 2. 1) vanishes. This point is illustrated in the following example:

Let A, B and C be variable quantities of the flow. The term AB/C by the above definition has the value $m = 1$ associated with it. Introducing the two assumed solutions of the given equation denoted by the single and double primes respectively and the solution given by their sums, subtracting the latter resultant equation from the sum of the first two in the established manner, we obtain the following terms in the superposability equation associated with the function π introduced via the pressure from the quantity AB/C:

$$A'B'/C' + A''B''/C'' - (A' + A'')(B' + B'')/(C' + C'').$$

For self-superposability:

$$A' \equiv A'' \equiv A, \; B' \equiv B'' \equiv B, \; C' \equiv C'' \equiv C,$$

and these terms reduce to:

$$2AB/C - 2AB/C \equiv 0.$$

It is, therefore, impossible to apply self-superposability to a pseudo-linear term. Although one could theoretically multiply the given equation through by the denominator of such a term, in the above example given by the quantity C, thereby avoiding the value $m = 1$, the given equation of motion would possibly become overly complex by thus making many of the linear terms nonlinear. Further difficulties can be encountered when the stress tensor is expressed in terms of some general functions of the velocity. This is investigated in greater detail later in this paper where such stress tensors are encountered, as in the analysis of Rivlin's and Reiner's equations.

4. 0 The Superposability Condition for Incompressible Newtonian Fluids.

4. 1 *A Closer Inspection of the Work of Previous Authors on the Concept of Superposability.*

In Chapter 2, the fundamental conditions of superposability as set down by such writers as Ballabh and Strang were presented. One of the most critical requirements that any subject must have is that its fundamental definitions be accurately and completely prescribed and that its basic development be well ordered and rigorous. This is particularly true for a subject such as superposability in fluid dynamics which is still very much in its infancy. For this reason, the fundamental definitions set down in Chapter 2 must be carefully examined.

To begin with, there seem to exist certain inconsistencies in the statement of the basic definitions and their usage. These inconsistencies have been suggested in Chapter 2 and are included in Tables I and II of the next section.

4. 2 *The Superposability Condition.*

Beginning with the initial definition of superposability developed by Ballabh as follows:

$$(4.2.1) \qquad -\nabla\pi = \nabla(U_1 \cdot U_2) - U_1 \times (\nabla \times U_2) - U_2 \times (\nabla \times U_1),$$

introduce the following identity:

$$(4.2.2) \qquad \nabla(U_1 \cdot U_2) \equiv U_1 \times (\nabla \times U_2) + (U_1 \cdot \nabla) U_2 + U_2 \times (\nabla \times U_1) + (U_2 \cdot \nabla) U_1.$$

Equation (4. 2. 1) becomes:

$$(4.2.3) \qquad -\nabla\pi = (U_1 \cdot \nabla) U_2 + (U_2 \cdot \nabla) U_1.$$

For self-superposability $U_1 \equiv U_2 \equiv U$ and equation (4. 2. 3) becomes:

$$(4.2.4) \qquad -\nabla\pi = 2(U \cdot \nabla) U.$$

Since the development of equations (4. 2. 3) and (4. 2. 4) in cartesian tensor notation will be of great use in deriving analogous conditions for other types of hydrodynamic equations, let us digress to make this development.

Beginning with the equations of motion in tensor notation:

$$(4.2.5) \qquad U_{i,t} + U_j U_{i,j} = F_j - \varrho^{-1} p_{,i} + \nu U_{i,jj},$$

introducing the solutions (U', P'), (U'', P'') and $(U' + U'', P' + P'' + \pi)$ into equation (4. 2. 5), with superposability defined as in the paragraph of equation (2. 0. 1), we obtain:

$$U'_{i,t} + U'_j U'_{i,j} = F'_i - P'_{,i} + \nu U'_{i,jj}, \tag{4. 2. 6}$$

$$U''_{i,t} + U''_j U''_{i,j} = F''_i - P''_{,i} + \nu U''_{i,jj}, \tag{4. 2. 7}$$

$$(U'_i + U''_i)_{,t} + (U'_j + U''_j)(U'_i + U''_i)_{,j} = (F'_i + F''_i) - (P' + P'' + \pi)_{,i} + \nu(U'_i + U''_i)_{,jj}. \tag{4. 2. 8}$$

Subtract equation (4. 2. 8) from the sum of equations (4. 2. 6) and (4. 2. 7) giving:

$$-\pi_{,i} = U'_j U''_{i,j} + U''_j U'_{i,j}. \tag{4. 2. 9}$$

The necessary and sufficient condition for superposability is that equation (4. 2. 9) determine a scalar function $\pi(x, y, z, t)$ [2]. If $U' \equiv U'' \equiv U$ equation (4. 2. 9) becomes the self-superposability condition:

$$-\pi_{,i} = 2\, U_j U_{i,j}. \tag{4. 2. 10}$$

Observe that equation (4. 2. 9) is identical to equation (4. 2. 3) and equation (4. 2. 10) is identical to (4. 2. 4). Note that equations (4. 2. 9) and (4. 2. 10) are assumed as the only definitions of superposability and self-superposability in this work for the incompressible Newtonian equation of motion.

The first advantage of the above definition is immediately apparent when one notices that the self-superposability condition given by equation (4. 2. 10) is just the nonlinear term in the equation of motion (4. 2. 5). The nonlinear term $U_j U_{i,j}$ can now be replaced by $-\frac{1}{2}\pi_{,i}$ the gradient of an arbitrary scalar function of x, y, z, t which satisfies equation (4. 2. 10). It is no longer necessary to include a function of the velocity itself in the definition of superposability such as was necessary when introducing χ in the analyses of Ballabh and Strang and in the same token, it no longer becomes necessary to rewrite the equations of motion as in the analysis of Ergun where H is also dependent on the velocity, so as to obtain the nonlinear term in the form of the self-superposability condition. It is apparent then that the definition of this paper provides a more direct way of handling the question of superposability.

The problem of solving the given nonlinear equations of motion in the general case can now be considered in a somewhat more systematic generalized manner. The question of solving these equations will now be handled from a general viewpoint wherein such questions as overspecified systems and solving derived equations can also be included as opposed to selected particular solutions similar to those of Table II. In this way, the given problem will be outlined in a very fundamental manner. The problem reduces to solving the following system of three equations:

$$U_{i,t} - \tfrac{1}{2}\pi_{,i} = F_i - P_{,i} + \nu U_{i,jj}, \tag{4. 2. 11}$$

$$U_{i,i} = 0, \tag{4. 2. 12}$$

and equation (4. 2. 10) for the unknowns U, P, and π. A systematic general approach to this solution is given in Table III of this chapter.

Introducing the pressure function $P' + P'' + \pi$ in the given manner suggests that when considering additional nonlinear terms, as for example appear in the non-Newtonian stress tensor, a corresponding scalar function π can be introduced for each such nonlinear

[2]) See Appendix A for additional discussion and analysis.

term resulting in an additional equation for the added π. As will be noted in Chapter 5, introducing three such nonlinear terms is handled by using the pressure function of the form $P' + P'' + \pi + \pi^{(1)} + \pi^{(2)} + \pi^{(3)}$ which results in the three added conditions of superposability in terms of $\pi^{(1)}, \pi^{(2)}, \pi^{(3)}$. This technique will be considered in greater detail later in this paper.

It may be noted that the technique set forth in this section, utilizing tensor notation, prescribes a definite procedure which will be utilized in extending the concept of superposability to other hydrodynamic equations. This then is a second and quite important advantage obtained from the definition and technique of obtaining said definition used in this work.

Table I.

Table of Superposable and Self-Superposable Conditions.

Author [References]	Superposable Conditions	Self-Superposable Conditions
Ballabh [1]	(1) $-\nabla\pi = \nabla(U' \cdot U'') - U' \times (\nabla \times U'') - U'' \times (\nabla \times U')$. Eliminating π from (1) by differentiation, assuming that $\pi_{,ij} \equiv \pi_{,ji}$: (2a) $\frac{\partial}{\partial y}[A] = \frac{\partial}{\partial x}[B]$, (2b) $\frac{\partial}{\partial z}[B] = \frac{\partial}{\partial y}[C]$, (2c) $\frac{\partial}{\partial x}[C] = \frac{\partial}{\partial z}[A]$, where: $A \equiv (w_1\eta_2 + w_2\eta_1) - (v_1\zeta_2 + v_2\zeta_1)$, $B \equiv (u_1\zeta_2 + u_2\zeta_1) - (w_1\xi_2 + w_2\xi_1)$, $C \equiv (v_1\xi_2 + v_2\xi_1) - (u_1\eta_2 + u_2\eta_1)$, and the vorticity components ξ, η, ζ are given by: $\xi = w_{,y} - v_{,z}$, $\eta = u_{,z} - w_{,x}$, $\zeta = v_{,x} - u_{,y}$. Introducing a perfect differential $d\chi$ into (2) a third condition is obtained: (3) $\nabla\chi = -U' \times (\nabla \times U'') - U'' \times (\nabla \times U')$.	From superposable condition (2): (1a) $\frac{\partial}{\partial y}(w\eta - v\zeta) = \frac{\partial}{\partial x}(u\zeta - w\xi)$, (1b) $\frac{\partial}{\partial z}(u\zeta - w\xi) = \frac{\partial}{\partial y}(v\xi - u\eta)$, (1c) $\frac{\partial}{\partial x}(v\xi - u\eta) = \frac{\partial}{\partial z}(w\eta - v\zeta)$. Introducing perfect differential $d\chi$: (2) $\nabla\chi = -U \times (\Delta \times U)$.
Strang [53]	(1) $-\nabla\pi = \nabla(U' \cdot U'') - U' \times (\nabla \times U'') - U'' \times (\nabla \times U')$. Introducing: $\nabla\chi = \nabla(U' \cdot U'') + \nabla\pi$: (2) $\nabla\chi = U' \times (\nabla \times U'') + U'' \times (\nabla \times U')$.	(1) $\nabla\chi = U \times (\nabla \times U)$. Equation (1) is obtained from superposability condition (2) with the constant two being absorbed into χ.
Ergun [16, 17]	(1) $-\nabla\pi = \nabla(U' \cdot U'') - U' \times (\nabla \times U'') - U'' \times (\nabla \times U')$. (2) $\nabla\chi = U' \times (\nabla \times U'') + U'' \times (\nabla \times U')$. Both conditions are identical to Strang's.	(1) $\nabla\chi = U \times (\nabla \times U)$. $\nabla \times \nabla\chi \equiv 0 = \nabla \times [U \times (\nabla \times U)]$, assuming: $\chi_{,ij} \equiv \chi_{,ji}$.

Author [References]	Superposable Conditions	Self-Superposable Conditions
Prakash [42, 43, 44]	For two dimensional flow condition (2) of Ballabh reduces to, using the equation of continuity: (1) $u_1\zeta_{2,x} + u_2\zeta_{1,x} + v_1\zeta_{2,y} + v_2\zeta_{1,y} = 0$.	For two dimensional flow: (1) $u\zeta_{,x} + v\zeta_{,y} = 0$.
Truesdell [65]	(1) curl $(W_1 \times U_2 + W_2 \times U_1) = 0$. W is the vorticity vector given by $W = \text{curl } U$. This is identical to the equations obtained by taking the curl of Ballabh's equation (3) and Strang's equation (2).	(1) curl $(W \times U) = 0$.
v.Krzywoblocki and Gold	(1) $-\pi_{,i} = U'_j U''_{i,j} + U''_j U'_{i,j}$, this is identical to above equation: $-\nabla\pi = \nabla(U' \cdot U'') - U' \times (\nabla \times U'') - U'' \times (\nabla \times U')$.	(1) $-\pi_{,i} = 2\, U_j U_{i,j}$.

Table II.

Some Illustrative Methods of Solving the Various Systems of Equations Associated with Equation (2. 0. 1), As Put forth by Ballabh, Strang, Ergun and Prakash.

Terminology: The components of vorticity are given by: $\xi = w_{,y} - v_{,z}$, $\eta = u_{,z} - w_{,x}$, $\zeta = v_{,x} - u_{,y}$; symbols S, SS, C, M refer to superposability, self-superposability, continuity and momentum equations respectively.

Author [References]	Analysis
Ballabh [1]	(1) S: $\frac{\partial}{\partial y}[A] = \frac{\partial}{\partial x}[B]$, $\frac{\partial}{\partial z}[B] = \frac{\partial}{\partial y}[C]$, $\frac{\partial}{\partial x}[C] = \frac{\partial}{\partial z}[A]$, where the terms are defined in Table I. Equations (1) are identically satisfied if either: (2a) $\xi_1 = \lambda u_1$, $\eta_1 = \lambda v_1$, $\zeta_1 = \lambda w_1$; $\xi_2 = \lambda u_2$, $\eta_2 = \lambda v_2$, $\zeta_2 = \lambda w_2$; (2b) $\xi_2 = \lambda_1 u_1$, $\eta_2 = \lambda_1 v_1$, $\zeta_2 = \lambda_1 w_1$; $\xi_1 = \lambda_2 u_2$, $\eta_1 = \lambda_2 v_2$, $\zeta_1 = \lambda_2 w_2$; where λ, λ_1, λ_2 may be functions of x, y, z and t. (3) S: $-\nabla\pi = \nabla(U' \cdot U'') - U' \times (\nabla \times U'') - U'' \times (\nabla \times U')$. For superposable motions of the type (2) the nonlinear terms in equation (3) vanish identically thereby determining π as follows: (4) $\pi = -(U' \cdot U'')\,\varrho$, no additive constant being necessary since π vanishes when either $U' = 0$, $U'' = 0$. (5) M: $\nu W_{i,jj} = W_{i,t}$, where W_i is the vorticity vector with components ξ, η, ζ. Equations (5) are solved for self-superposable motions of the type (2a) where λ is independent of x, y, z, and the results discussed from a boundary value point of view and a generalization of the Bernoulli theorem.
Ballabh [4]	(6) SS: $\nabla\chi = -U \times (\nabla \times U)$. For two dimensional motion this becomes: (7) SS: $u\zeta_{,x} + v\zeta_{,y} = 0$. (8) C: $u_{,x} + v_{,y} = 0$.

Author [References]	Analysis
Ballabh [4]	(9) M: $\zeta_{,t} = \nu \nabla^2 \zeta$. Equations (7), (8), and (9) are solved simultaneously for u and v by separately treating the cases where ζ is independent of x and y, where ζ depends on one of x and y, and where ζ depends on both x and y. Much of Kampé de Fériet's results are obtained here.
Ballabh [5]	Let $(u_1, v_1, 0)$ be an irrotational motion, $(u_2, v_2, 0)$ a rotational steady motion. u_1, v_1 must be independent of z. Assuming two dimensional motion: (10) S: $u_1 \zeta_{2,x} + v_1 \zeta_{2,y} = 0$, (11) M: $u_2 \zeta_{2,x} + v_2 \zeta_{2,y} = 0$. Continuity is identically satisfied by introducing the stream function ψ. Equations (10) and (11) are solved simultaneously for various special cases.
Ballabh [6]	For two dimensional flow in general: (12) S: $u_1 \zeta_{2,x} + v_1 \zeta_{2,y} + u_2 \zeta_{1,x} + v_2 \zeta_{1,y} = 0$. Introducing ψ_1, ψ_2 equation (12) becomes: (13) S: $\dfrac{\partial(\psi_1, \zeta_2)}{\partial(x, y)} + \dfrac{\partial(\psi_2, \zeta_1)}{\partial(x, y)} = 0$. (14) M: $\zeta_{1,t} + u_1 \zeta_{1,x} + v_1 \zeta_{1,y} = \nu \nabla^2 \zeta_1$. Using the stream function ψ, equations (13) and (14) are solved simultaneously for various combinations of rotational and irrotational flows.
Strang [52]	(15) SS: $U \times (\nabla \times U) = \nabla \chi$, and in particular when $\nabla \chi = 0$, (16) SS: $\nabla \times U = \lambda U$. (17a) M: $\alpha u - \Omega v = \dfrac{\partial}{\partial x} (\chi - \chi')$. (17b) M: $\alpha v + \Omega u = \dfrac{\partial}{\partial y} (\chi - \chi')$. (17c) M: $\alpha w = \dfrac{\partial}{\partial z} (\chi - \chi')$, where $\chi' = p\varrho^{-1} + \frac{1}{2} U^2 + V$, V is the force potential and α is the operator: $\alpha \equiv \left(\dfrac{\partial}{\partial t} - \nu \nabla^2\right)$. (18) C: $u_{,x} + v_{,y} + w_{,z} = 0$. System (16) and (17) is then solved simultaneously in a very clever fashion where the motion reduces to a plane motion and ψ is then used.
Strang [53]	(19) S: $\nabla \chi = U' \times (\nabla \times U'') + U'' \times (\nabla \times U')$. (20) SS: $\nabla \chi = U \times (\nabla \times U)$. (21) C: $u_{,x} + v_{,y} + w_{,z} = 0$. Strang considers various special problems using the corresponding equation of motion and equations (19) or (20) and (21). For example: (a) $\nabla \times U' = \lambda_2 U''$, $\nabla \times U'' = \lambda_1 U'$, (b) $\nabla \times U = \lambda U$, (c) Self-superposable and plane motions in general.
Ergun [16]	(22) S: $\nabla \chi = U' \times (\nabla \times U'') + U'' \times (\nabla \times U')$, $\chi_{,y} \equiv \chi_{,x}$. Ergun specifies various forms of the motion U', solves for a second motion U'' using the particular equation of motion, continuity and (22) simultaneously.

Author [References]	Analysis
Ergun [17]	(23) M: $U_{,t} - U \times (\nabla \times U) + \nu \nabla \times (\nabla \times U) = -\nabla H$, $H = p\varrho^{-1} + \Omega + \frac{1}{2} U^2$. (24) SS: $\nabla \chi = U \times (\nabla \times U)$. Operating on equations (23) and (24) by ∇: (25) $\nabla \times [U \times (\nabla \times U)] = 0$, (26) $\nabla \times U_{,t} + \nu \nabla \times [\nabla \times (\nabla \times U)] = 0$. Introducing ψ, equations (25) and (26) are solved simultaneously for various cases. H and p are then obtained from equations (23).
Prakash [43]	Assuming two dimensional motion: (27) S: $u_1 \zeta_{2,x} + v_1 \zeta_{2,y} + u_2 \zeta_{1,x} + v_2 \zeta_{1,y} = 0$. (28) M: $\left(u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} - \nu \nabla^2\right) \zeta = 0$. Introducing ψ, equations (27) and (28) are solved simultaneously for the special cases of a source, sink and doublet.
Prakash [44]	(29) M: $\left(\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} - \nu \nabla^2\right) \zeta = 0$, assuming two dimensional motion. (30) S: $u_1 \zeta_{2,x} + v_1 \zeta_{2,y} + u_2 \zeta_{1,x} + v_2 \zeta_{1,y} = 0$. Adding the following orthogonality condition: (31) $u_1 u_2 + v_1 v_2 = 0$, and considering the special motions $(u_1, 0)$, $(0, v_2)$ along with continuity, this system is solved simultaneously for various flows.
Prakash [42]	(32a) S: $\frac{\partial}{\partial x}\left(u_1 \zeta_2 + u_2 \zeta_1\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(v_1 \zeta_2 + v_2 \zeta_1\right) = 0$, for two dimensional motion. (32b) SS: $u\zeta_{,x} + v\zeta_{,y} = 0$. (32c) S: $\nabla^2 \psi = f(\psi)$, since $\zeta = \nabla^2 \psi$. (33) M: $\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu \nabla^2\right) \nabla^2 \psi = 0$. Considering $f(\psi) = k\psi$ in (32c), this system is analyzed and discussed.

Table III.

Proposed Techniques of Solution of System (4. 2. 10), (4. 2. 11), (4. 2. 12).

(4. 2. 10) SS:	$-\pi_{,i} = 2 U_j U_{i,j}$
(4. 2. 11) M:	$U_{i,t} - \frac{1}{2} \pi_{,i} = F_i - P_{,i} + \nu U_{i,jj}$
(4. 2. 12) C:	$U_{i,i} = 0$ Symbols SS, M, C defined in Table II.

General Notes:

Concerning liquids in general, one can distinguish three kinds of liquids as follows:

(i) Strictly incompressible liquids; for such liquids, the equation of state has the form: $\varrho = \varrho_0 =$ constant, and the pressure function is completely independent of the temperature function;

(ii) Liquids whose equation of state has the general form $f(p, \varrho, T) = 0$ or $f_1(p, \varrho) = 0$ and $f_2(p, T) = 0$, but for which, for the sake of simplicity, one can assume that the density is constant and consequently the equation of state reduces to the form: $f(p, T) = 0$;

(iii) Liquids for which the full equation of state must be considered: $f(p, \varrho, T) = 0$. Such liquids should be treated as compressible media (gases).

Concerning gases, they are always compressible.

As a result of the above outline, the following observations are made:

(1) For strictly incompressible liquids, the system of three equations (momentum, continuity and energy), is sufficient to determine uniquely the three unknowns U, p and T.

(2) In case (ii) above, we have more equations than unknowns such that the system is initially overspecified.

(3) In case (iii) above, with the condition that $\varrho \neq$ constant, the system is again determinate.

In the following discussion, case (i) will be used.

Techniques of Solution:

(a) $\pi(x, y, z, t)$ not given, but arbitrary:

(1) In the cases where the stream function $\psi(x, y, z, t)$ can be introduced take the curl of equations (4. 2. 10, 11) and solve the resultant equations for ψ. π can then be obtained from equation (4. 2. 10) and P from equation (4. 2. 11). Equation (4. 2. 12) is identically satisfied using ψ.

(2) When ψ cannot be introduced, equation (4. 2. 12) and the curl of (4. 2. 10, 11) form an overspecified system of three equations in the one unknown U. Special solutions of such a system can be obtained by inspection as was noted in Table II for specific cases but for the general theory of solutions one must refer to the literature on overspecified systems which will be discussed in a later chapter. Knowing U, π is obtainable from equation (4. 2. 10) and P from equation (4. 2. 11).

(3) An alternative proposition to (2) is as follows: when ψ cannot be introduced, a theoretically possible overspecified system in the unknown U is obtained from equations (4. 2. 12) and curl of (4. 2. 10). Equation (4. 2. 10) remains nonlinear, however, after the operation, consequently this mode of solution is definitely not inferior to that of (2).

(b) $\pi(x, y, z, t)$ given:

(1) When ψ can be introduced, solve the nonlinear equation (4. 2. 10) for ψ and obtain P from equation (4. 2. 11), knowing π.

(2) When ψ cannot be introduced, an overspecified system is obtained from equations (4. 2. 10) and (4. 2. 12), the first of which is nonlinear. P is again obtained from equation (4. 2. 11), knowing π.

This system can be solved in yet another way, as follows:

(3) When ψ can be introduced, equations (4. 2. 10) and the curl of (4. 2. 11) represent an overspecified system in ψ. Note that (4. 2. 10) is nonlinear.

(4) When ψ cannot be introduced, the problem of a double overspecified system is introduced with the need of satisfying (4. 2. 10), curl (4. 2. 11) and (4. 2. 12). This is obviously more complex than (2) above.

It is clear, however, that the nonlinear equation remains in methods (3) and (4) and adding an operation only complicates matters. Methods (1) and (2) are therefore more desireable.

Additional notes:

If we use the equation of state for a liquid given by $\varrho =$ constant, i. e., case (i) in the general notes, the above analysis is correct as it stands (independent of the energy equation). If, however, as is frequently done in various investigations of incompressible motions (Goldstein, for example), the equation of state for a perfect gas given by $p = \varrho RT$ is used, i. e., case (ii) above, then the following additional problem originally noted by v. Krzywoblocki is encountered: The energy equation given by equation (1. 1. 11) incompressible case must be added to the original system of equations of momentum (4. 2. 5) and continuity (4. 2. 12), and along with the equation of state, we have an overspecified system of six equations and only five unknowns, ϱ being constant. The application of self-superposability as outlined above would then have to be accordingly modified to include the equations of energy and state. For the sake of completeness one solution of the resultant system will be proposed as follows: Substitute the equation of state into the equation of motion thereby obtaining a system of three equations (SS, M and energy) in two unknowns U and T. Assuming ψ can be introduced satisfying continuity identically, we can calculate it from the curl of equations (4. 2. 10, 11) for T will then vanish via the operation. π can be obtained from equation (4. 2. 10) and T from the overspecified system (4. 2. 11) and energy.

General remarks:

Summarizing, the following general conclusion can be made from the above table: When π is not given, we in general take the curl of equations (4. 2. 10, 11), but may not avoid the nonlinearity in solving for U. The necessary link previously mentioned between the equation operated on and the resultant equation is provided by first obtaining π from equation (4. 2. 10) and using this value in the equation operated on, namely (4. 2. 11), to obtain P. If π is given there is apparently no way of avoiding the problem of solving a nonlinear equation. Having solved for U and P under case (i) of the general notes, we can obtain the temperature from the energy equation since it is now just a linear equation in T.

It is interesting to note, that if π is not given we may avoid the nonlinearity of the system (4. 2. 10, 12), curl (4. 2. 11), which has a solution when $U =$ const., or when U is a linear function of (x, y, z). Some other possibilities may appear. Reasoning similar to this may provide an insight into an entire class of functions which represent the origin to the linear equations.

5. 0 The Superposability Condition for Incompressible Non-Newtonian Fluids.

5. 1 *Introduction.*

The purpose of this chapter is to develop analogous superposability conditions for some of the other hydrodynamic equations discussed in Chapter 1. The analysis will be based on the technique of this paper presented in Chapters 3 and 4.

An inspection of the classical hydrodynamic equations of motion for an incompressible Newtonian fluid discussed in section 1. 1 indicates that for λ, μ assumed constant and connected by the Stokes' relation which is a reasonable assumption for an incompressible fluid, these equations reduce to the standard Navier-Stokes equations given by (1. 16). This equation was treated from the superposability point of view in Chapter 4. We shall therefore consider the superposability conditions for a non-Newtonian incompressible fluid based upon some of the equations given in section 1. 2.

5. 2 *Some General Observations.*

Let us begin by noting some of the general results of applying the concept of self-superposability to several of the non-Newtonian equations. Applying this concept to Boussinesq's equation, given by (1. 2. 1), it is immediately obvious that the resultant linear equation for an incompressible flow would be exactly that of the previously linearized Navier-Stokes equations. In a similar manner, since the functions F_1 and F_2 are essentially nonlinear velocity terms, the Rivlin equation, given by (1. 2. 4), would reduce simply to an equation with only the one velocity term, $U_{i,t}$ appearing. The equations referred to are the stress tensors developed by these authors and the resultant equations of motion can be obtained from (1. 1. 3). The technique for considering the nonlinear velocity terms introduced in the non-Newtonian stress tensor will be illustrated first by taking one such term in Boussinesq's equation and developing the superposability and self-superposability conditions based on the technique outlined in the last chapter. Subsequently, these conditions will be developed for the more general case represented by Rivlin's equation.

5. 3 *Boussinesq's Equation of Motion.*

Let us consider that part of Boussinesq's equation formed by taking just one nonlinear term in the stress tensor. The stress tensor then becomes for an incompressible fluid, according to equation (1. 2. 1):

$$p_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} + 2(A - C)\,(\varepsilon_{ik}\omega_{kj} + \varepsilon_{jk}\omega_{ki}), \tag{5. 3. 1}$$

where A and C are second order coefficients of viscosity, not specified in form but assumed constant for an incompressible flow, and:

$$\varepsilon_{ij} = \tfrac{1}{2}(U_{i,j} + U_{j,i}), \quad \omega_{ij} = \tfrac{1}{2}(U_{i,j} - U_{j,i}). \tag{5. 3. 2}$$

The generalized equation of motion for a viscous fluid is given by equation (1. 1. 3) and can be written in the following form:

$$U_{i,t} + U_j U_{i,j} = F_i + \varrho^{-1} p_{ij,j}. \tag{5. 3. 3}$$

Differentiating equation (5. 3. 1), expanding the tensors, collecting terms and substituting into equation (5. 3. 3) the equation of motion becomes:

$$\begin{aligned} &U_{i,t} + U_j U_{i,j} \\ &\quad = -P_{,i} + F_i + \nu U_{i,jj} + (\bar{A} - \bar{C})\,(U_{k,jj} U_{k,i} - U_{i,kj} U_{j,k} + U_{k,ij} U_{k,j}), \end{aligned} \tag{5. 3. 4}$$

where $\bar{A}$ and $\bar{C}$ are second order kinematic coefficients of viscosity, again assumed constant. Using the technique outlined in Chapter 4 introduce the solutions: (U', P'), (U'', P'') and $\left(U' + U'', P' + P'' + \pi + \sum_{n=1}^{3} \pi^{(n)}\right)$. Note that a scalar function π has been introduced for each nonlinear term in equation (5. 3. 4). The following system of equations results:

$$(5.3.5)\quad U'_{i,t} + U'_j U'_{i,j} = -P'_{,i} + F'_i + \nu U'_{i,jj} + (\bar{A} - \bar{C})(U'_{k,jj} U'_{k,i} - U'_{i,kj} U'_{j,k} + U'_{k,ij} U'_{k,j}),$$

$$(5.3.6)\quad U''_{i,t} + U''_j U''_{i,j} = -P''_{,i} + F''_i + \nu U''_{i,jj} + (\bar{A} - \bar{C})(U''_{k,jj} U''_{k,i} - U''_{i,kj} U''_{j,k} + U''_{k,ij} U''_{k,j}),$$

$$(5.3.7)\quad (U'_i + U''_i)_{,t} + (U'_j + U''_j)(U'_i + U''_i)_{,j} = -\left(P' + P'' + \pi + \sum_{n=1}^{3} \pi^{(n)}\right)_{,i} + (F'_i + F''_i) + \nu(U'_i + U''_i)_{,jj} + (\bar{A} - \bar{C})\cdot$$
$$([U'_k + U''_k)_{,jj}(U'_k + U''_k)_{,i} - (U'_i + U''_i)_{,kj}(U'_j + U''_j)_{,k} + (U'_k + U''_k)_{,ij}(U'_k + U''_k)_{,j}].$$

Combining these three equations as follows: (5. 3. 5) + (5. 3. 6) — (5. 3. 7), we obtain:

$$(5.3.8)\quad -\pi_{,i} - \left(\sum_{n=1}^{3} \pi^{(n)}\right)_{,i} = U'_j U''_{i,j} + U''_j U'_{i,j} + (\bar{A} - \bar{C})\cdot$$
$$(-U'_{k,jj} U''_{k,i} - U''_{k,jj} U'_{k,i} + U'_{i,kj} U''_{j,k} + U''_{i,kj} U'_{j,k} - U'_{k,ij} U''_{k,j} - U''_{k,ij} U'_{k,j}).$$

The superposability condition then requires that equation (5. 3. 8) determine the scalar functions π, i. e.:

$$(5.3.9)\quad -\pi_{,i} = U'_j U''_{i,j} + U''_j U'_{i,j},$$

$$(5.3.10)\quad \pi^{(1)}_{,i} = (\bar{A} - \bar{C})(U'_{k,jj} U''_{k,i} + U''_{k,jj} U'_{k,i}),$$

$$(5.3.11)\quad -\pi^{(2)}_{,i} = (\bar{A} - \bar{C})(U'_{i,kj} U''_{j,k} + U''_{i,kj} U'_{j,k}),$$

$$(5.3.12)\quad \pi^{(3)}_{,i} = (\bar{A} - \bar{C})(U'_{k,ij} U''_{k,j} + U''_{k,ij} U'_{k,j}).$$

Equation (5. 3. 9) is the superposability condition previously determined for an incompressible viscous Newtonian fluid (reference equation 4. 2. 9)[3]. For $U' \equiv U'' \equiv U$ the self-superposability condition is obtained as follows:

$$(5.3.13)\quad -\pi_{,i} = 2 U_j U_{j,j} = -E^{(0)},$$

$$(5.3.14)\quad \pi^{(1)}_{,i} = 2(\bar{A} - \bar{C}) U_{k,jj} U_{k,i} = E^{(1)},$$

$$(5.3.15)\quad -\pi^{(2)}_{,i} = 2(\bar{A} - \bar{C}) U_{i,kj} U_{j,k} = -E^{(2)},$$

$$(5.3.16)\quad \pi^{(3)}_{,i} = 2(\bar{A} - \bar{C}) U_{k,ij} U_{k,j} = E^{(3)}.$$

The equation of motion given by (5. 3. 4) is now associated with the following system of equations:

$$(5.3.17\text{a})\quad U_{i,t} = -P_{,i} + F_i + \nu U_{i,jj} + \tfrac{1}{2} \sum_{n=0}^{3} E^{(n)},$$

$$(5.3.17\text{b})\quad -\pi_{,i} = 2 U_j U_{i,j},$$

$$(5.3.17\text{c})\quad \pi^{(n)}_{,i} = E^{(n)} \qquad (n = 1, 2, 3),$$

$$(5.3.17\text{d})\quad U_{i,i} = 0.$$

---

[3]) In a manner analogous to the previous discussion of section 4. 2 (see appendix A), the reader may find compatibility equations for the system in question similar to those previously mentioned.

Note that taking the curl of equation (5. 3. 17a) results in the same expression as was obtained in the last chapter when the curl of equation (4. 2. 11) was taken. The general solution of system (5. 3. 17) is considered in Table IV below.

An alternate way of expressing the self-superposability condition for equation (5. 3. 8) is as follows. Introduce:

$$R_{,i} = \sum_{n=1}^{3} E^{(n)}. \tag{5. 3. 18}$$

Equation (5. 3. 18) takes the place of the three equations given by (5. 3. 17c) such that the system now has four equations instead of six. What is more significant, the self-superposability conditions defined in terms of the functions $\pi^{(n)}$ are now represented by one equation instead of three. The number of equations has been reduced, however the form of this lone equation is obviously far more complex than that of the original three. The solution of this system is also considered in Table IV.

Table IV.

Proposed Techniques of Solution of System (5.3.17) and System (5. 3. 17a, b, d), (5. 3. 18).

System A	System B
(5. 3. 17a) M: $U_{i,t} + P_{,i} = F_i + \nu U_{i,jj} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{3} E^{(n)}$;	(5. 3. 17a)
(5. 3. 17b) SS: $-\pi_{,i} = 2\, U_j\, U_{i,j}$;	(5. 3. 17b)
(5. 3. 17d) C: $U_{i,i} = 0$;	(5. 3. 17d)
(5. 3. 17c) SS: $\pi^{(n)}_{,i} = E^{(n)}$ $(n = 1, 2, 3)$.	(5. 3. 18) SS: $R_{,i} = \sum_{n=1}^{3} E^{(n)}$.

Terminology given on preceeding page.

General Notes:

The discussion on the equation of state noted both at the beginning and end of Table III applies to Table IV as well, since we are considering here an incompressible non-Newtonian motion. The general notations made in Table III apply here exactly while the illustrative solution given near the end of the table can be used here with very slight modification.

Techniques of Solution:

(a) $\pi(x, y, z, t)$ and $\pi^{(n)}(x, y, z, t)$ not given, but arbitrary:

(1) When the stream function $\psi(x, y, z, t)$ can be introduced, for system A take the curl of equations (5. 3. 17a, b, c) and solve the resulting multiply overspecified equations for ψ. The functions π can then be obtained from equations (5. 3. 17b, c) and P can be obtained from (5. 3. 17a). Equation (5. 3. 17d) is identically satisfied. System B is solved in exactly the same manner obtaining R from equation (5. 3. 18) after solving for ψ. There is no difference between the two systems in this case, except the degree of overspecification.

(2) When ψ cannot be introduced, for system A equation (5. 3. 17d) and the curl of (5. 3. 17a, b, c) form an overspecified system in U. The available literature on overspecified and multiple overspecified systems will be discussed in a later chapter. Solving this system for U the functions π can be obtained from equations (5. 3. 17b, c) and P from equation (5. 3. 17a). Again it is easily seen that there is no difference between systems A and B, except in the degree of overspecification.

3) An alternative proposition to (2) is as follows: When ψ cannot be introduced, for system A a multiply overspecified system in U is obtained from equation (5. 3. 17d) and the curl of equations (5. 3. 17 b, c). Using system B, however, only a simply overspecified system is obtained from equations (5. 3. 17d) and curl (5. 3. 18). In either subcase the systems contain nonlinear equations and as a result case (3) is definitely not inferior to case (2).

(b) $\pi(x, y, z, t)$ and $\pi^{(n)}(x, y, z, t)$ given:

(1) When ψ can be introduced, for system A the multiply overspecified nonlinear system of equations (5.3.17b, c) can theoretically be solved for ψ. P can then be obtained from equation (5.3.17a). The problem is simplified somewhat using system B since only the single but highly complex nonlinear equation (5. 3. 18) need be solved for ψ along with (5. 3. 17b).

(2) When ψ cannot be introduced, for system A an additional equation (5. 3. 17d) is introduced into the already multiply overspecified system. For system B, adding equation (5. 3. 17d) makes the system overspecified along with equation (5. 3. 18). In either subcase, the systems are either quite complex in the nonlinearity or multiply overspecified and still nonlinear.

Alternate possibilities of solving case (b) are available in the same fashion as was noted in Table III under case (b) (3) and (4) by using the curl operator. The resulting systems again remain nonlinear and at times multiply overspecified so again nothing is gained by this approach.

General Remarks:

When π and $\pi^{(n)}$ are not specified, we can in general apply the curl to equation (5. 3. 17a, b, c) and solve for U not avoiding the nonlinearity. The necessary link between the equation operated on and the resultant equation is provided in first solving for π from equations (5. 3. 17c) or (5. 3. 18) and using this value to find P in equation (5. 3. 17a). If π and $\pi^{(n)}$ are given, there is apparently no way of avoiding the initial problem of solving a nonlinear equation.

5. 4 *Rivlin's Equation.*

Let us now consider the more general non-Newtonian incompressible equation as given by Rivlin and proceed along the lines outlined in section 5. 3. Rivlin's stress tensor is given by equation (1. 2. 4) as follows:

$$p_{ij} = -p\delta_{ij} + F_1\varepsilon_{ij} + F_2\varepsilon_{ik}\varepsilon_{kj}, \tag{5. 4. 1}$$

where F_1 and F_2 are any functions of I_2 and I_3, two of the three principal invariants of ε_{ij}, given by:

$$I_2 = \varepsilon_{mn}\varepsilon_{mn}, \tag{5. 4. 2}$$

$$I_3 = \varepsilon_{ab}\varepsilon_{ac}\varepsilon_{cb}. \tag{5. 4. 3}$$

F_1 and F_2 are essentially functions of U so that introducing the solutions U', U'' and $U' + U''$ will be accomplished in the following manner:

$$F_1(U') \equiv F_1', \quad F_1(U'') \equiv F_1'', \quad F_1(U' + U'') \equiv G_1; \tag{5. 4. 4a}$$

$$F_2(U') \equiv F_2', \quad F_2(U'') \equiv F_2'', \quad F_2(U' + U'') \equiv G_2. \tag{5. 4. 4b}$$

Proceeding in the manner previously outlined, the equation of motion becomes:

$$\begin{aligned} U_{i,t} + U_j U_{i,j} = \overline{F}_i - P_{,i} &+ \tfrac{1}{2}\varrho^{-1}F_1 U_{i,jj} + \tfrac{1}{2}\varrho^{-1}F_{1,j}(U_{i,j} + U_{j,i}) \\ &+ \tfrac{1}{4}\varrho^{-1}F_2(U_{k,jj}U_{i,k} + U_{k,jj}U_{k,i} + U_{i,kj}U_{k,j} + U_{i,kj}U_{j,k} \\ &+ U_{k,ij}U_{k,j} + U_{k,ij}U_{j,k}) \\ &+ \tfrac{1}{4}\varrho^{-1}F_{2,j}(U_{i,k}U_{k,j} + U_{i,k}U_{j,k} + U_{k,i}U_{k,j} + U_{k,i}U_{j,k}), \end{aligned} \tag{5. 4. 5}$$

where $\overline{F}_i$ is now the external force per unit mass.

Introducing the solutions (U', P'), (U'', P''), $\left(U' + U'', P' + P'' + \pi + \sum_{n=1}^{13}\pi^{(n)}\right)$, in view of the fourteen nonlinear terms, and proceeding as before to eliminate P from the resultant three equations we obtain the following superposability condition:

$$\begin{aligned} -\pi_{,i} - \left(\sum_{n=1}^{13}\pi^{(n)}\right)_{,i} = U_j' U_{i,j}'' + U_j'' U_{i,j}' &+ (2\varrho)^{-1}[U_{i,jj}'(F_1' - G_1) \\ &+ U_{i,jj}''(F_1'' - G_1)] + (2\varrho)^{-1}[U_{i,j}'(F_{1,j}' - G_{1,j}) + U_{i,j}''(F_{1,j}'' - G_{1,j}) \\ &+ U_{j,i}'(F_{1,j}' - G_{1,j}) + U_{j,i}''(F_{1,j}'' - G_{1,j})] + (4\varrho)^{-1}[U_{k,jj}'U_{i,k}'(F_2' - G_2) \\ &+ U_{k,jj}''U_{i,k}''(F_2'' - G_2) - G_2(U_{k,jj}'U_{i,k}'' + U_{k,jj}''U_{i,k}') + \cdots], \end{aligned} \tag{5. 4. 6}$$

where the dots refer to similar groups of terms in the products:

$$U_{k,jj}U_{k,i},\ U_{i,kj}U_{k,j},\ U_{i,kj}U_{j,k},\ U_{k,ij}U_{k,j},\ U_{k,ij}U_{j,k},$$
$$U_{i,k}U_{k,j},\ U_{i,k}U_{j,k},\ U_{k,i}U_{k,j},\ U_{k,i}U_{j,k},$$

the last four terms being associated with the quantities: $F_{2,j}'$, $F_{2,j}''$, $G_{2,j}$.

For self-superposability: $U' \equiv U'' \equiv U$, $F_1' \equiv F_1'' \equiv F_1$, $F_2' \equiv F_2'' \equiv F_2$, $F_1(2U) \equiv \overline{G}_1$, $F_2(2U) \equiv \overline{G}_2$ and equation (5. 4. 6) becomes:

$$(5.4.7)\quad -\pi_{,i} - \left(\sum_{n=1}^{13} \pi^{(n)}\right)_{,i} = 2U_j U_{i,j} + (2\varrho)^{-1}[2U_{i,jj}(F_1 - \overline{G}_1)]$$
$$+ (2\varrho)^{-1}[2U_{i,j}(F_{1,j} - \overline{G}_{1,j}) + 2U_{j,i}(F_{1,j} - \overline{G}_{1,j})]$$
$$+ (4\varrho)^{-1}[2U_{k,jj}U_{i,k}(F_2 - 2\overline{G}_2) + \cdots].$$

It is significant to point out that if the form of the functions F_1 or F_2 is such that either of the parantheses $(F_1 - \overline{G}_1)$, $(F_{1,j} - \overline{G}_{1,j})$, etc., vanishes, the self-superposability condition may fail for the particular term and consequently for the entire equation of motion. This is to say that if $F_1(U) = \overline{G}_1 \equiv F_1(2U)$ or $F_2(U) = 2\overline{G}_2 \equiv 2F_2(2U)$, etc., the self-superposability equation may fail. If, for example, F_1 is of the form A/B in the variable velocity such that we would have $F_1 = A/B = \overline{G}_1 = F_1(2U) = A/B$. The term $F_1 U_{i,jj}$ in equation (5. 4. 5) would be of the form $U_{i,jj}\, A/B$ such that this term would be of the pseudo-linear type discussed in section 3. 2. It is interesting to note, however, that aside from the above mathematical consideration, it is a physical rarity that the velocity term would appear in the denominator of any term due to the resultant difficulty with the analysis of stagnation conditions.

Note that $F(U)$ and $F(2U) \equiv \overline{G}$ are in general of the same structure. More specifically, if F consists of the standard operations such as addition, subtraction, multiplication, division, raising to a power with the exponent independent of U, differentiation, integration, etc., then a self-superposability condition will exist in the form given by equation (3. 2. 1). A detailed mathematical investigation of the various class of functions will not be attempted, however, a short example will be noted to best illustrate the above points. Let us assume that our equation of motion contains products of functions which are nonlinear in U as follows:

$$(5.4.8)\qquad F_1 G_1 + F_2 G_2.$$

Proceeding in the established manner, the superposability equation would contain the following terms due to (5. 4. 8):

$$(5.4.9)\quad F_1' G_1' + F_2' G_2' + F_1'' G_1'' + F_2'' G_2'' - (F_1' + F_1'')(G_1' + G_1'')$$
$$- (F_2' + F_2'')(G_2' + G_2'') = -F_1' G_1'' - F_1'' G_1' - F_2' G_2'' - F_2'' G_2',$$

assuming the given functions obey the distributive law, i. e., $(F_1' + F_1'')(G_1' + G_1'') = F_1' G_1' + F_1' G_1'' +$ etc. For self-superposability (5. 4. 9) would take on the form suggested by equation (3. 2. 1), i. e., $-2F_1 G_1 - 2F_2 G_2$ depending on the specific form of F, G. Examples where this would not work is if F or G contained such quantities as e^U or $L(U)$, where L is a nonlinear operator, at which time the operation illustrated in (5. 4. 9) might fail. Let it suffice, however, to note that in general, for the standard operations previously noted, the superposability and self-superposability conditions can always be obtained for the given equation of motion using the established technique of this paper.

In addition to the conclusion obtained above concerning the nature of the functions F_1 and F_2 the following results can be noted from the superposability and self-superposability conditions given by equations (5. 4. 6) and (5. 4. 7) respectively:

(1) Incompressible non-Newtonian equations which can be derived from Rivlin's equation by specifying F_1 and F_2 have superposability and self-superposability conditions which can be obtained directly from equations (5. 4. 6) and (5. 4. 7) respectively, providing

that the functions F_1 and F_2 are such that these conditions exist as was noted in the previous section. This is easily verified for the portion of Boussinesq's equation previously considered.

(2) As Rivlin's incompressible non-Newtonian stress tensor approaches the incompressible Newtonian stress tensor given by the expression: $p_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}$, the functions F_1 and F_2 approach the constant values 2μ and 0 respectively such that $F_1(U) = F_1(2U) = \bar{G}_1 = 2\mu$ and $F_2(U) = F_2(2U) = \bar{G}_2 = 0$. Equations (5. 4. 6) and (5. 4. 7) reduce then to the conditions previously obtained given by equations (4. 2. 9) and (4. 2. 10). It can be shown, therefore, that as the more general incompressible non-Newtonian stress tensor given by Rivlin approaches the incompressible Newtonian stress tensor the superposability and self-superposability conditions for the first equation approach those of the latter.

Having established superposability and self-superposability criterion for Rivlin's equation, let us proceed once again to utilize the latter to form a system associated with Rivlin's equation which can more easily be solved. Equation (5. 4. 5) is associated with the following system of equations (see equation (3. 2. 1)):

$$U_{i,t} - \bar{F}_1 + P_{,i} = \tfrac{1}{2}\pi_{,i} + (2^m - 2)^{-1}\left(\sum_{n=1}^{13}\pi^{(n)}\right)_{,i}, \tag{5. 4. 10}$$

$$\pi_{,i} = -2U_j U_{i,j}, \tag{5. 4. 11a}$$

$$\pi^{(1)}_{,i} = -(2\varrho)^{-1}[2U_{i,jj}(F_1 - \bar{G}_1)], \tag{5. 4. 11b}$$

$$\pi^{(2)}_{,i} = -(2\varrho)^{-1}[2U_{i,j}(F_{1,j} - \bar{G}_{1,j})], \tag{5. 4. 11c}$$

$$\pi^{(3)}_{,i} = -(2\varrho)^{-1}[2U_{j,i}(F_{1,j} - \bar{G}_{1,j})], \tag{5. 4. 11d}$$

$$\pi^{(4)}_{,i} = -(4\varrho)^{-1}[2U_{k,jj}U_{i,k}(F_2 - 2\bar{G}_2)], \tag{5. 4. 11e}$$

etc., where the form of F_1, F_2 determines the number of variable quantities in each nonlinear term and therefore m.

$$U_{i,i} = 0. \tag{5. 4. 12}$$

The solutions to this system can now be discussed in a manner similar to that of Tables III and IV. A similar discussion concerning the equation of state will apply here also. Assume that the force $\vec{F}$ can be derived from a potential function Ω such that $\vec{F} = -\nabla\Omega$.

(a) π and $\pi^{(n)}$ not given, but arbitrary:

(1) When ψ can be introduced, taking the curl of equation (5. 4. 10) results in the following expression:

$$\nabla \times U_{i,t} = 0. \tag{5. 4. 13}$$

Since $U_{i,t}$ is a vector, the following identity can be used for expanding equation (5. 4. 13):

$$\operatorname{curl}\vec{F} \equiv \nabla \times \vec{F} = -\varepsilon_{ijk}F_{j,k},$$

where $\vec{F}$ is a vector function. Equation (5. 4. 13) becomes: $\nabla \times U_{i,t} = -\varepsilon_{ijk}U_{j,kt} = 0$. If we conclude that any solution U independent of t satisfies this equation, then $U_{i,t}$ is itself zero which of course is meaningless in the original equation of motion. We can, however, conclude from this equation and the vector identity: curl grad $\pi = 0$, where π is a scalar function, that $U_{i,t}$ can also be represented by the gradient of some scalar function, say λ as follows: $U_{i,t} = \lambda_{,i}$. Applying self-superposability in this instance

implies only that after taking the curl of the resultant equation, the only remaining term can be replaced by the gradient of some scalar function along with curl (5. 4. 11). π can be obtained in turn from equations (5. 4. 11) and P from equation (5. 4. 10). Equation (5. 4. 12) is identically satisfied.

(2) When ψ cannot be introduced the overspecified system of equations (5. 4. 12), curl (5. 4. 11) and (5. 4. 13) must be solved for U with the same difficulty encountered as in the above discussion.

(b) π and $\pi^{(n)}$ given:

When ψ can or cannot be introduced the same general outline of Table IV applies with the result that the nonlinearity cannot be avoided. In any event, the same difficulty as encountered above applies here.

Using Rivlin's equation with the functions F_1 and F_2 unspecified we see from the above analysis that little, if anything, is gained from the application of self-superposability in view of the discussion given after equation (5. 4. 13). This is of course due to the fact that the possible nonlinearity of these functions doesn't leave enough in the equation after linearization to solve. When the functions F_1 and F_2 are specified in particular cases, one must seek to introduce a parameter whenever possible in some manner to preserve at least some of the nonlinear terms. Examples of this technique are given in Chapters 6 and 7 for compressible flow. Note that although the application of the self-superposability condition to solve the associated system seems to be of little use, superposable fluid motions can still be constructed, in a manner previously discussed.

6. 0 The Superposability Condition for Compressible Newtonian Fluids.

6. 1 *Basic Equations.*

The equation of motion for a compressible Newtonian fluid is given by equation (1. 1. 9) as follows:

$$\varrho(U_{i,t} + U_j U_{i,j}) = -p_{,i} + \varrho F_i - \tfrac{2}{3}(\mu U_{k,k})_{,i} + [\mu(U_{i,j} + U_{j,i})]_{,j}. \tag{6. 1. 1}$$

The energy equation is given by:

$$\varrho C_p(T_{,t} + U_j T_{,j}) = \Phi + (p_{,t} + U_j p_{,j}) + (KT_{,k})_{,k}, \tag{6. 1. 2}$$

where:

$$\Phi = p_{ij}\varepsilon_{ij} = \mu(U_{i,j}U_{i,j} + U_{i,j}U_{j,i} - \tfrac{2}{3}U_{k,k}^2). \tag{6. 1. 3}$$

The continuity equation is given by:

$$\varrho_{,t} + (\varrho U_i)_{,i} = 0. \tag{6. 1. 4}$$

The equation of state for a perfect fluid is:

$$p = \varrho \bar{R} T, \tag{6. 1. 5}$$

$\bar{R}$ being the gas constant. The coefficient of viscosity, μ, varies with temperature and there are several empirical relations available. In general this variation is represented as a power series where the coefficients have been evaluated:

$$\mu(T) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n T^n. \tag{6. 1. 6}$$

Using the kinetic theory of gases, it has been shown [32] that for a polyatomic gas the following relation is approximately valid:

$$K = \mu(aC_v + b), \tag{6. 1. 7}$$

where a and b depend on the gas constant $\bar{R}$ and the molecular weight of the gas, M. C_p and C_v are assumed constant. The problem is to solve the system of five equations given by (6. 1. 1, 2, 4, 5, 6) for the five unknowns U, p, ϱ, T, μ.

6. 2 *Solution of the System of Equations Associated with the Equation of Motion for a Compressible Newtonian Flow, Applying the Concept of Self-Superposability.*

Let us begin by nondimensionalizing equation (6. 1. 1) by multiplying through by the factor $d(\varrho V^2)^{-1}$, where d is some representative length and V is the free stream velocity:

$$(6.2.1)\quad (U_i V^{-1})_{,t} dV^{-1} + U_j V^{-1}(U_i V^{-1})_{,j} d = -p_{,i}\varrho_0(p_0\varrho)^{-1} p_0 d(\varrho_0 V^2)^{-1} + F_i d(V^2)^{-1} + \mu(\varrho V d)^{-1}[(U_i V^{-1})_{,jj} d^2 + \tfrac{1}{3}(U_i V^{-1})_{,\mu} d^2] - \mu^{-1} d\mu(\varrho V d)^{-1}[\tfrac{2}{3}\mu_{,i}(U_k V^{-1})_{,k} d - \mu_{,j}((U_i V^{-1})_{,j} d + (U_j V^{-1})_{,i} d)].$$

$$(6.2.2)\quad U^*_{i,t^*} + U^*_j U^*_{i,j^*} = -p^*_{,i^*}\varrho^{*-1} R T_0 V^{-2} + F^*_i + R^{-1}(U^*_{i,j^*j^*} + \tfrac{1}{3}U^*_{j,j^*i^*}) - (\mu R)^{-1}(\tfrac{2}{3}\mu^*_{,i^*} U^*_{k,k^*} - \mu^*_{,j^*}(U^*_{i,j^*} + U^*_{j,i^*})),$$

where the stars indicate nondimensional quantities and the nondimensional Reynold's number is given by the following relation:

$$(6.2.3)\qquad R \equiv \varrho V d\mu^{-1} \equiv V d\nu^{-1}.$$

Using the fact that $\gamma R T_0 = a_0^2$, $a_0^2 V^{-2} = M_0^2$ and dropping the stars equation (6. 2. 2) becomes in terms of nondimensional quantities:

$$(6.2.4)\quad U_{i,t} + U_j U_{i,j} = -P_{,i}(\gamma M_0^2)^{-1} + F_i + R^{-1}(U_{i,jj} + \tfrac{1}{3}U_{j,ji}) - (\mu R)^{-1}(\tfrac{2}{3}\mu_{,i} U_{k,k} - \mu_{,j}(U_{i,j} - U_{j,i})),$$

where:

$$(6.2.5)\qquad P_{,i} = p_{,i}\varrho^{-1}.$$

Utilizing the Reynold's number as a parameter equation (6. 2. 4) can be linearized in the usual manner resulting in the following superposability equation:

$$(6.2.6)\quad -U'_j U''_{i,j} - U''_j U'_{i,j} = \pi_{,i}(\gamma M_0^2)^{-1} + R^{-1}[\tfrac{2}{3} U'_{k,k}(\mu_{,i}\mu^{-1})'' + \tfrac{2}{3} U''_{k,k}(\mu_{,i}\mu^{-1})' - U'_{i,j}(\mu_{,j}\mu^{-1})'' - U''_{i,j}(\mu_{,j}\mu^{-1})' - U'_{j,i}(\mu_{,j}\mu^{-1})'' - U''_{j,i}(\mu_{,j}\mu^{-1})'],$$

where the following is used: $(\mu_{,j}\mu^{-1})' = \mu_{,j}(T')\mu^{-1}(T'), \ldots$, and just one scalar function π has been introduced to represent all the nonlinear terms in the equation. Note that the assumption of Reynold's number being a parameter is made obligatory by the fact that only the terms $U_{i,t}$, $-P_{,i}(\gamma M_0^2)^{-1}$ would otherwise remain after the linearization process which would be of little value in solving the given equation. This fact was previously observed in the discussion of Rivlin's equation.

For self-superposability, equation (6. 2. 6) becomes:

$$(6.2.7)\quad -2U_j U_{i,j} = \pi_{,i}(\gamma M_0^2)^{-1} + (R\mu)^{-1}(\tfrac{4}{3}\mu_{,i} U_{k,k} - 2\mu_{,j}(U_{i,j} + U_{j,i})).$$

Equation (6. 2. 4) is therefore associated with the following system of two equations:

$$(6.2.8)\quad U_{i,t} = -P_{,i}(\gamma M_0^2)^{-1} + F_i + R^{-1}(U_{i,jj} + \tfrac{1}{3}U_{j,ji}) + (2\gamma M_0^2)^{-1}\pi_{,i},$$

$$(6.2.9)\quad -\pi_{,i}(\gamma M_0^2)^{-1} = 2U_j U_{i,j} + (R\mu)^{-1}(\tfrac{4}{3}\mu_{,i} U_{k,k} - 2\mu_{,j}(U_{i,j} + U_{j,i})).$$

Taking the curl of equation (6. 2. 8) would result in the following linear equation in U which can be solved:

$$(6.2.10)\qquad \nabla \times U_{i,t} = R^{-1}\nabla \times U_{i,jj},$$

where F is assumed again derived from a potential and $U_{j,j}$ being a scalar function, $\nabla \times (U_{j,j})_{,i} = 0$. Note that equation (6. 2. 10) is identical in form to those obtained for the incompressible case after applying the curl operator to the linearized equation of motion in Tables III and IV. The variation appears in the coefficient R^{-1} appearing as a parameter here as opposed to the universal constant μ appearing in the incompressible case. A comparison of these equations will be brought out in the discussion of Chapter 10. Knowing U, from (6. 2. 10), curl (6. 2. 9) equation (6. 1. 4) becomes simply a linear equation in ϱ which can readily be solved. Since the Reynold's number is a parameter, μ is now known as a function of $\varrho\ (x, y, z, t)$ from equation (6. 2. 3) as follows:

$$\mu = \varrho V d R^{-1} \tag{6. 2. 11}$$

Let us proceed now to nondimensionalize equation (6. 1. 2) by multiplying through by the factor $d[\varrho V C_p(\triangle T)]^{-1}$, where $(\triangle T)$ is the temperature difference between the wall and the fluid at a large distance from the body given by:

$$\triangle T = T_w - T_\infty. \tag{6. 2. 12}$$

The resultant equation where all quantities are in nondimensional form becomes using also equation (6. 1. 7):

$$\begin{aligned} T_{,t} + U_j T_{,j} = {} & E R^{-1}(U_{i,j} U_{i,j} + U_{i,j} U_{j,i} - \tfrac{2}{3} U_{k,k}^2) + E(\gamma M_0^2)^{-1} \cdot \\ & (P_{,t} + U_j P_{,j}) + (PrR)^{-1} T_{,kk} + (PrR^{-1}) T_{,k} \mu_{,k} \mu^{-1}, \end{aligned} \tag{6. 2. 13}$$

where P is defined in equation (6. 2. 5) and the Prandtl number, Pr, Eckert number, E and thermal diffusivity α are given by:

$$Pr = \nu\alpha^{-1} = \mu C_p K^{-1} = C_p(aC_v + b)^{-1} = \text{const.}, \ \alpha = K(\varrho C_p)^{-1}, \tag{6. 2. 14}$$

$$E = V^2[C_p(\triangle T)]^{-1} = \text{const.} \tag{6. 2. 15}$$

Let us now introduce the equation of state given by equation (6. 1. 5) into (6. 2. 13):

$$\begin{aligned} T_{,t} + U_j T_{,j} = {} & E R^{-1}(U_{i,j} U_{i,j} + U_{i,j} U_{j,i} - \tfrac{2}{3} U_{k,k}^2) \\ & + E R \cdot (\gamma M_0^2)^{-1}(T_{,t} + \varrho_{,t}\varrho^{-1} T + U_j T_{,j} + U_j \varrho_{,j} \varrho^{-1} T) \\ & + (PrR)^{-1} T_{,kk} + (PrR)^{-1} T_{,k} \mu_{,k} \mu^{-1}. \end{aligned} \tag{6. 2. 16}$$

Knowing U, ϱ and μ as a function of $\varrho(x, y, z, t)$ equation (6. 2. 16) is just a linear equation which can readily be solved along with curl (6. 2. 9) using (6. 1. 6) for T subject to the condition noted below. The function π can be obtained from equation (6. 2. 9) and the pressure from equation (6. 2. 8).

It is necessary to point out the following very pertinent restriction. At the outset of this discussion, the system of five equations uniquely defined U, p, ϱ, T, μ. The necessity of making the Reynold's number a parameter amounts to making the system overspecified. This, in turn, imposes an additional restriction on the solution of the following form: μ as a function of T given by equation (6. 1. 6) must equal the value obtained for μ as a function of ϱ from equation (6. 2. 11), i. e.;

$$\mu(T) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n T^n = \varrho(x, y, z, t)\ V d R^{-1}. \tag{6. 2. 17}$$

Thus having solved for ϱ we see that T must satisfy both the energy equation and equation (6. 2. 17). In this form, the added restriction is of an algebraic type where the coefficients a_n and the right hand side are known. This can be made into a differential condition by differentiating both sides of the equation, say with respect to x.

Assuming π is not given, U is obtained in the above manner from equation (6. 2. 10) and the analysis follows as outlined. If π is specified the problem becomes certainly as involved as the original system prior to applying the concept of self-superposability with the necessity of solving the nonlinear equation (6. 2. 9) along with (6. 1. 4) for U and ϱ for example using equation (6. 2. 3). Certainly with π given, we cannot avoid the necessity of solving a nonlinear equation with any arrangement and the application of self-superposability is of little help.

An alternative method of solving the system of equations given in section 6. 1 utilizing the self-superposability condition with the Reynold's number as a parameter is given by the following discussion. In the method mentioned above the Reynold's number was assumed constant for a given calculation and the unknowns U, ϱ, T, p, μ evaluated. The question of consistency of the constant value for R in any given analysis can be handled in the method now being considered. As before, U and μ can be obtained from equation (6. 2. 10), curl (6. 2. 9) as a function of (x, y, z, t) but also as a function of the constant quantity R now assumed unknown. The continuity equation can be written in the following form:

$$\varrho_{,t} + \varrho_{,i} U_i + \varrho U_{i,i} = 0. \tag{6. 2. 18}$$

Substituting equation (6. 1. 6) into (6. 2. 3) we obtain:

$$\varrho = R(Vd)^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n T^n. \tag{6. 2. 19}$$

Substituting this result only partly into equation (6. 2. 18) we obtain:

$$\varrho_{,t} + \varrho_{,i} U_i + R(Vd)^{-1} U_{i,i} \sum_{n=0}^{\infty} a_n T^n = 0. \tag{6. 2. 20}$$

In a more general form equation (6. 2. 20) can be written as follows since U is now known:

$$F_1[x, y, z, t;\ \varrho(x, y, z, t);\ T(x, y, z, t);\ R] = 0. \tag{6. 2. 21}$$

Substituting equation (6. 1. 6) into (6. 2. 16) we obtain the following general form:

$$F_2[x, y, z, t;\ \varrho(x, y, z, t);\ T(x, y, z, t);\ R] = 0. \tag{6. 2. 22}$$

Equations (6. 2. 21), curl (6. 2. 9) using (6. 1. 6) and (6. 2. 22) must be solved simultaneously for ϱ and T with R as a parameter. Although we will not consider in detail the solution of this special problem, it is to be noted that the analysis of the problem has been presented, which is our primary purpose in this paper, reducing it to somewhat standard form. It is necessary to observe that by fixing the Reynold's number as a parameter and introducing it into the system, we have added the requirement given by equation (6. 2. 17).

Eingegangen 25. Januar 1957.

Zur Struktur der l-Klassengruppe galoisscher Zahlkörper.

Von *Heinrich-Wolfgang Leopoldt*, z. Zt. in Princeton.

Bezeichnungen.

In der vorliegenden Arbeit verwenden wir durchweg die folgenden Bezeichnungen:

P der Körper der rationalen Zahlen,

l eine Primzahl,

$\tilde{\mathsf{P}}$ der Körper der rational-l-adischen Zahlen,

$\tilde{\Gamma}$ der Ring der ganzen rational-l-adischen Zahlen,

ζ eine primitive l-te Einheitswurzel,

K ein galoisscher Zahlkörper mit den Eigenschaften

$$(0) \qquad \zeta \in \mathsf{K}, \qquad (\mathsf{K}:\mathsf{P}) \not\equiv 0 \bmod l,$$

$\mathfrak{g} = \{\sigma, \tau, \ldots\}$ seine Galoisgruppe,

χ bzw. Φ die einfachen bzw. l-adisch-irreduziblen Charaktere von $\mathfrak{g}$.

Einleitung.

Kummer hat gezeigt, daß die Klassenzahl des Körpers $\mathsf{K} = \mathsf{P}(\zeta)$ genau dann durch l teilbar ist, wenn bereits der Quotient der Klassenzahlen von $\mathsf{K} = \mathsf{P}(\zeta)$ und dem größten reellen Teilkörper $\mathsf{K}_0 = \mathsf{P}(\zeta + \zeta^{-1})$ diese Eigenschaft besitzt. Da dieser Quotient — Kummers erster Klassenzahlfaktor —, wie man mit analytischen Mitteln zeigt, einen einfachen elementaren Ausdruck besitzt[1]), ergibt sich aus jenem Satze leicht das bekannte, die Bernoullischen Zahlen benutzende Teilbarkeitskriterium. Es sei Ω ein relativ-imaginär-quadratischer Zahlkörper, also eine quadratische Erweiterung

$$\Omega = \Omega_0(\sqrt{-\partial}) \qquad (\partial \text{ totalpositiv})$$

eines total-reellen Zahlkörpers Ω_0. Hecke hat vermutet, daß dann ebenfalls der Quotient der Klassenzahlen von Ω und Ω_0 einen elementaren Ausdruck besitzt. Ist nun $\Omega = \mathsf{K}$ normal mit den Eigenschaften (0), so gilt wiederum der Satz, daß die Klassenzahl von K genau dann durch l teilbar ist, wenn bereits der Quotient der Klassenzahlen von K und K_0 diese Eigenschaft hat. Wir werden dies (Satz 3) in der scharfen, für $\mathsf{K} = \mathsf{P}(\zeta)$ von Hecke herrührenden Form beweisen, daß der Rang der Gruppe der imaginären l-Klassen niemals kleiner ist, als der Rang der Gruppe der reellen l-Klassen. Wenn die Heckesche Vermutung für K richtig ist, ergibt sich damit ein ähnliches rationales Kriterium für die Teilbarkeit der Klassenzahl h von K durch die Primzahl l. Dies trifft insbesondere zu für abelsche Körper K; der in Rede stehende elementare Ausdruck für den Klassenzahl-

1) Vgl. etwa Hasse [1].

quotienten ist die Relativklassenzahlformel etwa in der von Hasse gegebenen durchsichtigen Gestalt. Aus diesem Umstand werden wir in einer nachfolgenden Arbeit unter Heranziehung weiterer Hilfsmittel — welche die begriffliche Bedeutung jener Relativklassenzahlformel berühren — eine große Zahl von Kongruenzbedingungen für die nicht im Grad aufgehenden Primteiler der Klassenzahl abelscher Körper herleiten.

Als gemeinsame Wurzel dieser Beziehungen zwischen imaginären und reellen l-Klassen stellt sich der *Spiegelungssatz* (Satz 2) heraus, dessen Beweis das Hauptziel dieser Arbeit ist. Er besagt folgendes: Zerlegt man die l-Klassengruppe $\mathfrak{D}$ eines Körpers K ihrer Struktur als $\mathfrak{g}$-Operatorgruppe entsprechend in die den l-adischen Charakteren Φ von $\mathfrak{g}$ zugeordneten direkten Faktoren $\mathfrak{D}_\Phi$,

$$\mathfrak{D} = \operatorname{dir} \prod_{\Phi} \mathfrak{D}_\Phi, \tag{1}$$

so bewirkt die Annahme $\zeta \in \mathsf{K}$ die Existenz einer Spiegelungsabbildung $\Phi \to \bar{\Phi}$ (mit $\bar{\bar{\Phi}} = \Phi$) dieser Charaktere mit der Eigenschaft, daß die zu einem Paar spiegelbildlich liegender Charaktere $\Phi, \bar{\Phi}$ gehörenden Faktoren $\mathfrak{D}_\Phi, \mathfrak{D}_{\bar{\Phi}}$ sich im Rang „nicht allzusehr" unterscheiden. Die genaue Bedeutung des „nicht allzusehr" hängt ab vom Verhalten der Einheitengruppe von K. Er beruht auf folgendem Umstand: Zerlegen wir den l-Klassenkörper N von K entsprechend zu (1),

$$\mathsf{N} = \bigcup_{\Phi} \mathsf{N}_\Phi, \tag{2}$$

so fällt in dem $\mathfrak{D}_\Phi$ zugeordneten Teilkörper N_Φ eine „genügend große" Untergruppe von $\mathfrak{D}_{\bar{\Phi}}$ in die l-Hauptklasse (Satz 1). Für die präzise Formulierung der Sätze siehe § 3. Der Spiegelungssatz geht im Falle $\mathsf{K} = \mathsf{P}(\zeta)$ über in den — für die Theorie der irregulären Kreiskörper fundamentalen — Satz von Pollaczek; sein Beweis gibt somit zugleich einen neuen Beweis jenes Satzes. Daneben gibt es noch einen weiteren Spezialfall, für den der Spiegelungssatz bekannt ist; dies ist der Körper $\mathsf{K} = \mathsf{P}(\sqrt{-3}, \sqrt{D})$, $D > 0$. Er sagt dann aus, daß die Ränge $e_\Omega, e_{\bar{\Omega}}$ der 3-Klassengruppen der beiden quadratischen Zahlkörper $\Omega = \mathsf{P}(\sqrt{D})$, $\bar{\Omega} = \mathsf{P}(\sqrt{-3D})$ die Ungleichung

$$e_\Omega \leq e_{\bar{\Omega}} \leq e_\Omega + 1$$

erfüllen. Dieser Satz wurde von Scholz bewiesen und stellt das einfachste Anwendungsbeispiel dar.

Den Herren des *Institute for Advanced Study, Princeton*, wünsche ich für die Gewährung der Mitgliedschaft — und damit für die Ermöglichung dieser Arbeit — meinen Dank auszudrücken.

§ 1. Vorbemerkungen.

1. Der Gruppenring $\tilde{\Gamma}\mathfrak{g}$. Der Gruppenring $\tilde{\mathsf{P}}\mathfrak{g}$ ist halbeinfach. Aus den absolutirreduziblen Charakteren χ von $\mathfrak{g}$ erhalten wir durch Spurbildung

$$\Phi = \operatorname{spur}_{\tilde{\mathsf{P}}}(\chi) \tag{1}$$

die l-adisch irreduziblen Charaktere Φ von $\mathfrak{g}$ und mit ihrer Hilfe die primitiven Zentrumsidempotente

$$1_\Phi = \frac{\chi(1)}{(\mathfrak{g}:1)} \sum_{\sigma} \Phi(\sigma^{-1})\,\sigma. \tag{2}$$

Das Zentrum $\tilde{Z}_\Phi$ der einfachen Teilalgebra $\tilde{P}\mathfrak{g}1_\Phi$ in der direkten Zerlegung

$$\tilde{P}\mathfrak{g} = \operatorname{dir} \sum_\Phi \tilde{P}\mathfrak{g}1_\Phi$$

ist isomorph zum Wertekörper des Charakters χ und ist somit die unverzweigte Erweiterung vom Grade $(\tilde{Z}_\Phi : \tilde{P}_\Phi) = \dfrac{\Phi(1)}{\chi(1)}$ des Grundkörpers $\tilde{P}_\Phi = \tilde{P}1_\Phi$. Die Teilalgebra $\tilde{P}\mathfrak{g}1_\Phi$ selbst ist isomorph zur Algebra der $\chi(1)$-reihigen Matrizen über $\tilde{Z}_\Phi$.

Der Gruppenring $\tilde{\Gamma}\mathfrak{g}$ enthält die 1_Φ und ist folglich analog zerlegbar

$$\tilde{\Gamma}\mathfrak{g} = \operatorname{dir} \sum_\Phi \tilde{\Gamma}\mathfrak{g}1_\Phi. \tag{3}$$

Die Diskriminante der Basis $(\ldots \sigma \ldots)_{\sigma \in \mathfrak{g}}$ ist $(\mathfrak{g} : 1)^{(\mathfrak{g} : 1)}$, also Einheit in $\tilde{\Gamma}$. Mithin ist $\tilde{\Gamma}\mathfrak{g}$ Maximalordnung von $\tilde{P}\mathfrak{g}$. Es sei $\mathfrak{K}$ der Restklassenkörper mod l von $\tilde{P}$. Durch koeffizientenweise Restklassenabbildung mod l geht $\tilde{\Gamma}\mathfrak{g}$ über in den Gruppenring $\mathfrak{K}\mathfrak{g}$. Dieser ist ebenfalls halbeinfach. Die absolut-irreduziblen Charaktere bleiben absolut-irreduzibel über $\mathfrak{K}$. Da $\tilde{Z}_\Phi/\tilde{P}_\Phi$ eine reine Restklassenerweiterung ist, bleiben auch die Φ mod l irreduzibel; es ist also auch $\mathfrak{K}\mathfrak{g}1_\Phi = \tilde{\Gamma}\mathfrak{g}1_\Phi$ mod l irreduzibel.

Wir führen schließlich den Normalteiler $\mathfrak{g}_\Phi$ aller σ mit $\Phi(\sigma) = \Phi(1)$ ein und bemerken

$$\sigma 1_\Phi = 1_\Phi \qquad (\sigma \in \mathfrak{g}_\Phi). \tag{4}$$

2. Abelsche $\mathfrak{g}$-Gruppen von l-Potenzordnung. Jede solche Gruppe $\mathfrak{A}$ ist eine $\tilde{\Gamma}\mathfrak{g}$-Gruppe, denn es ist $A^{l^N} = 1$, $A \in \mathfrak{A}$, für hinreichend großes N, und besitzt daher die direkte Zerlegung

$$\mathfrak{A} = \operatorname{dir} \prod_\Phi \mathfrak{A}_\Phi \tag{5}$$

mit $\mathfrak{A}_\Phi = \mathfrak{A}^{1_\Phi}$. Da Φ mod l irreduzibel bleibt, ändert sich diese Zerlegung nicht, falls man $\mathfrak{A}$ — im elementar-abelschen Fall — als $\mathfrak{K}\mathfrak{g}$-Gruppe auffaßt. Nach (4) ist $\mathfrak{A}_\Phi$ elementweise invariant bei $\sigma \in \mathfrak{g}_\Phi$:

$$A^\sigma = A \text{ für } A \in \mathfrak{A}_\Phi,\ \sigma \in \mathfrak{g}_\Phi. \tag{6}$$

Der l-Rang einer $\mathfrak{g}$-zyklischen Untergruppe $\mathfrak{A}'_\Phi < \mathfrak{A}_\Phi$ ist gleich dem Rang eines einfachen Rechtsideals von $\tilde{P}\mathfrak{g}1_\Phi$, also gleich $\Phi(1)$. Der $\mathfrak{g}$-*Rang von* $\mathfrak{A}_\Phi$, d. h. die Anzahl a_Φ der $\mathfrak{g}$-zyklischen direkten Faktoren ist demnach gegeben durch

$$(\mathfrak{A}_\Phi : \mathfrak{A}^l_\Phi) = l^{\Phi(1) a_\Phi}.$$

Auf $\mathfrak{A}_\Phi$ ist die Normabbildung

$$A \to N_\Phi(A) = \prod_{\sigma \in \mathfrak{g}_\Phi} A^\sigma$$

ein Automorphismus.

3. Die Spiegelung. Wenden wir 2 an auf die Gruppe der l-ten Einheitswurzeln in K, so erhalten wir in der Form

$$\zeta^\sigma = \zeta^{\chi^*(\sigma)} \tag{7}$$

einen abelschen, also absolut-irreduziblen Charakter von $\mathfrak{g}$ in $\tilde{P}$, dessen Kern $\mathfrak{g}_{\chi^*}$ mit der Fixgruppe des Teilkörpers $P(\zeta) \leq K$ in $\mathfrak{g}$ zusammenfällt. Mit Φ ist auch der durch $\hat{\Phi}(\sigma) = \Phi(\sigma^{-1})$ definierte Charakter irreduzibel in $\tilde{P}$ und dasselbe gilt von

$$\bar{\Phi} = \chi^* \hat{\Phi}. \tag{8}$$

Diesen l-adisch irreduziblen Charakter $\bar{\Phi}$ nennen wir das *Spiegelbild von* Φ, da offenbar

$$\bar{\bar{\Phi}} = \Phi$$

erfüllt ist.

§ 2. Hilfssätze.

1. Die Einheiten-l-Klassengruppe. Die Faktorgruppe $\mathfrak{E} = E/E^l$ der Einheitengruppe E von K nach der Gruppe der l-ten Einheitenpotenzen sei als *Einheiten-l-Klassengruppe von* K bezeichnet. Es ist nach § 1, 2

$$\mathfrak{E} = \operatorname{dir} \prod_{\Phi} \mathfrak{E}_{\Phi},$$

und $\mathfrak{E}_{\Phi}$ wird durch Einheiten des zu $\mathfrak{g}_{\Phi}$ gehörigen Teilkörpers K_{Φ} erzeugt. Wir wollen den $\mathfrak{g}$-Rang von $\mathfrak{E}_{\Phi}$ bestimmt.

Es sei zunächst $l = 2$. Dann ist $(\mathfrak{g} : 1) \equiv 1 \bmod 2$, also K total-reell und $\mathfrak{E}$ das direkte Produkt der Einheitswurzelgruppe $\{\pm 1\}$ mit der Gruppe E_+ der normpositiven Einheiten. Ist $\mathsf{E}_1, \ldots, \mathsf{E}_{r-1}$ eine Basis von E_+, so wird vermöge

$$\mathsf{E}_i^{\sigma} = \prod_j \mathsf{E}_j^{d_{ij}(\sigma)}$$

eine unimodulare Darstellung $\sigma \to D(\sigma) = (d_{ij}(\sigma))$ von $\mathfrak{g}$ durch E_+ gegeben, deren Charakter sich nach dem Dirichlet-Minkowskischen Einheitensatz wie folgt bestimmt: Es ist $\operatorname{Char} D = \psi_{E_+} = \mathring{\varepsilon}_{\mathfrak{u}} - \varepsilon_{\mathfrak{g}}$, wo $\mathring{\varepsilon}_{\mathfrak{u}}$ den vom Hauptcharakter $\varepsilon_{\mathfrak{u}}$ der Zerlegungsgruppe $\mathfrak{u}$ einer unendlichen Primstelle von K induzierten Charakter von $\mathfrak{g}$ und $\varepsilon_{\mathfrak{g}}$ den Hauptcharakter von $\mathfrak{g}$ bezeichnet. (Da K total-reell ist, ist $\mathfrak{u} = 1$, was wir hier jedoch nicht brauchen.) Da die Darstellung $\sigma \to D(\sigma) \bmod l$ in die Darstellung von $\mathfrak{g}$ durch $\mathfrak{E}_+ = E_+E^l/E^l$ übergeht, $\{\pm 1\}$ die Darstellung $\sigma \to \varepsilon_{\mathfrak{g}}(\sigma)$ liefert und $\mathfrak{E}$ direktes Produkt von $\mathfrak{E}_+$ mit der durch (-1) erzeugten l-Klassengruppe $\{-E^l\}/E^l$ ist, erhalten wir für den Charakter $\psi_{\mathfrak{E}}$ der Darstellung von $\mathfrak{g}$ durch $\mathfrak{E}$ die Formel

$$\psi_{\mathfrak{E}} = \mathring{\varepsilon}_{\mathfrak{u}}. \tag{1}$$

Für $l > 2$ ist $(\mathfrak{g} : 1) \not\equiv 0 \bmod l$, K total-imaginär, also $\{\zeta\}$ die volle Gruppe der Einheitswurzeln von l-Potenzordnung in K. Alle Einheiten-l-Klassen werden bereits erzeugt durch ζ und die Elemente einer geeigneten torsionsfreien Gruppe E_+ normpositiver Einheiten von K. Durch Übertragung der Schlüsse von $l = 2$ auf $l > 2$ folgt nun

$$\psi_{\mathfrak{E}} = \varepsilon_{\mathfrak{u}} - \varepsilon_{\mathfrak{g}} + \chi^*, \tag{2}$$

wo χ^* den durch § 1, (7) definierten Charakter bezeichnet. Die Vielfachheit von Φ in $\mathring{\varepsilon}_{\mathfrak{u}}$ ist nun gleich $\chi\left(\frac{\mathfrak{u}}{(\mathfrak{u} : 1)}\right)$. Aus (1) bzw. (2) entnimmt man somit unmittelbar die Vielfachheit von Φ in $\psi_{\mathfrak{E}}$, d. h. den gewünschten $\mathfrak{g}$-Rang von $\mathfrak{E}_{\Phi}$.

Hilfssatz 1. *Die Einheiten-l-Klassengruppe* $\mathfrak{E}$ *von* K *ist das direkte Produkt*

$$\mathfrak{E} = \operatorname{dir} \prod_{\Phi} \mathfrak{E}_{\Phi} \tag{3}$$

der Untergruppen $\mathfrak{E}_{\Phi} = \mathfrak{E}^{1_{\Phi}}$, *welche bereits durch Einheiten der Teilkörper* K_{Φ} *erzeugt werden.* $\mathfrak{E}_{\Phi}$ *hat für* $l = 2$ *oder für* $l > 2$ *und* $\Phi \neq \varepsilon_{\mathfrak{g}}$, χ^* *den* $\mathfrak{g}$*-Rang*

$$d_{\Phi} = \chi\left(\frac{\mathfrak{u}}{(\mathfrak{u} : 1)}\right), \tag{4}$$

wo $\mathfrak{u}$ *die Zerlegungsgruppe einer unendlichen Primstelle von* K *bezeichnet und der einfache Charakter* χ *durch* $\Phi = \operatorname{spur} \tilde{\mathfrak{p}}(\chi)$ *bestimmt ist. Für* $l > 2$ *und* $\Phi = \varepsilon_{\mathfrak{g}}$ *oder* $= \chi^*$ *ist*

$$d_{\varepsilon_{\mathfrak{g}}} = 0, \quad d_{\chi^*} = 1. \tag{5}$$

Allgemein gilt für $l > 2$ *die Relation*

$$d_{\Phi} + d_{\bar{\Phi}} = \chi(1), \tag{6}$$

wenn $\bar{\Phi}$ *das Spiegelbild von* Φ *bezeichnet.*

Es bleibt nur noch (6) zu beweisen; dies ergibt sich aber sofort aus der Definition von $\bar{\Phi}$ und dem Umstand, daß

$$\chi^*(\sigma_\infty) = -1$$

ausfällt für die Erzeugende σ_∞ jeder beliebigen Zerlegungsgruppe $\mathfrak{u}$ einer unendlichen Primstelle von K.

Eine Einheiten-l-Klasse $\mathsf{E}_0 E^l$ heiße *primär*, wenn $\mathsf{K}(\sqrt{\mathsf{E}_0})/\mathsf{K}$ unverzweigt ist. Nach dem Kummerschen Zerlegungsgesetz bedeutet dies, daß E_0 ein l-ter Potenzrest mod $\mathfrak{L}^{el}$ ist, wo $\mathfrak{L}$ das Produkt der Primteiler von l in K und e ihre durch $l-1$ dividierte gemeinsame Verzweigungsordnung bezeichnet. Es sei $\mathfrak{E}_0 = \operatorname{dir} \prod_{\Phi} \mathfrak{E}_{0\Phi}$ die Gruppe der primären Einheiten-l-Klassen. Für den $\mathfrak{g}$-Rang δ_Φ von $\mathfrak{E}_{0\Phi}$,

$$(\mathfrak{E}_{0\Phi} : 1) = l^{\delta_\Phi \Phi(1)},$$

gilt dann jedenfalls

$$0 \leqq \delta_\Phi \leqq d_\Phi. \tag{7}$$

2. Die *l*-Klassengruppe. Es sei D die volle Divisorengruppe von K und H die Untergruppe aller $\mathfrak{a} \in D$ mit $\mathfrak{a}^m \cong \alpha$, $\alpha \in \mathsf{K}$ für einen zu l primen geeigneten Exponenten m. Die Faktorgruppe

$$\mathfrak{D} = D/H$$

heißt die *l-Klassengruppe von* K. Es gilt dann

Hilfssatz 2. *Die l-Klassengruppe* $\mathfrak{D}$ *von* K *ist das direkte Produkt*

$$\mathfrak{D} = \operatorname{dir} \prod_{\Phi} \mathfrak{D}_\Phi \tag{8}$$

der Untergruppen $\mathfrak{D}_\Phi = \mathfrak{D}^{1\Phi}$. *Sie ist kanonisch* $\mathfrak{g}$*-isomorph zur Gruppe* $\mathfrak{C}$ *der Divisorenklassen* C *von l-Potenzordnung. Die l-Klassen aus* $\mathfrak{D}_\Phi$ *und die Klassen aus* $\mathfrak{C}_\Phi$ *werden durch Divisoren des Teilkörpers* K_Φ *erzeugt.*

Abgesehen von der $\mathfrak{g}$-Isomorphie $\mathfrak{D} \underset{\mathfrak{g}}{\cong} \mathfrak{C}$ ergibt sich alles aus § 1, 2. Ist nun $\mathfrak{k} \in \mathfrak{D}$, so gibt es in $\mathfrak{k}$ einen Divisor $\mathfrak{a}$ von l-Potenzordnung in bezug auf die Gruppe der Hauptdivisoren. Die Klasse C von $\mathfrak{a}$ hängt dann nur von $\mathfrak{k}$ ab und ist eindeutig durch $\mathfrak{k}$ bestimmt. Durch $\mathfrak{k} \to C$ erhalten wir die gewünschte $\mathfrak{g}$-Isomorphie.

3. Der *l*-Klassenkörper. Der H zugeordnete Klassenkörper N/K ist absolut galoissch und heißt der *l-Klassenkörper von* K. Es sei $\mathfrak{G}$ die Galoisgruppe von N/P und $\mathfrak{A}$ die Fixgruppe des Körpers K. Dann ist $\mathfrak{G}$ eine Erweiterung von $\mathfrak{A}$ zur Faktorgruppe $\mathfrak{g}$,

$$\mathfrak{G} = \bigcup_{\sigma} S_\sigma \mathfrak{A},$$

und $\mathfrak{A}$ wird zur $\mathfrak{g}$-Gruppe vermöge

$$S_\sigma^{-1} A S_\sigma = A^\sigma.$$

Da $(\mathfrak{g}:1) \not\equiv 0 \bmod l$ ist, zerfällt die Erweiterung, d. h. wir können die Vertreter so wählen, daß sie eine zu $\mathfrak{g}$ isomorphe Gruppe bilden,

$$S_\sigma S_\tau = S_{\sigma\tau}.$$

Der Artinisomorphismus

$$\mathfrak{k} \to \left(\frac{\mathsf{N}/\mathsf{K}}{\mathfrak{k}}\right) = A$$

von $\mathfrak{A}$ mit $\mathfrak{D}$ ist dann ein $\mathfrak{g}$-Isomorphismus. Dementsprechend zerfällt $\mathfrak{A}$ in das direkte Produkt

$$\mathfrak{A} = \operatorname{dir} \prod_{\Phi} \mathfrak{A}_\Phi$$

der Untergruppen $\mathfrak{A}_\Phi = \mathfrak{A}^{1\Phi}$ und N in das Kompositum

$$\mathsf{N} = \bigcup_{\Phi} \mathsf{N}_\Phi,$$

wo N_Φ der Invariantenkörper des Komplementärprodukts von $\mathfrak{A}_\Phi$ in $\mathfrak{A}$ ist und folglich die zu $\mathfrak{D}_\Phi$ isomorphe Galoisgruppe $\mathfrak{A}_\Phi$ über K besitzt. Auch N_Φ ist absolut galoissch und seine Galoisgruppe $\mathfrak{G}_\Phi$ eine zerfallende Erweiterung von $\mathfrak{A}_\Phi$ zur Faktorgruppe $\mathfrak{g}$. Nach Konstruktion ist N_Φ der maximale Teilkörper von N, in dessen Galoisgruppe über K die Regel

$$A_\Phi{}^{1\Phi} = A_\Phi$$

gilt.

§ 3. Der Spiegelungssatz.

1. Die Grundlage für den Beweis des Spiegelungssatzes bildet der folgende

Satz 1. *In dem zum direkten Faktor $\mathfrak{D}_\Phi$ der l-Klassengruppe $\mathfrak{D}$ von K gehörigen Klassenkörper N_Φ fällt eine $\mathfrak{g}$-Untergruppe $\mathfrak{D}'_{\bar\Phi}$ des zum Spiegelbild $\bar\Phi$ von Φ gehörigen direkten Faktors $\mathfrak{D}_{\bar\Phi}$ vom $\mathfrak{g}$-Rang*

$$e'_{\bar\Phi} = e_\Phi - \delta_{\bar\Phi} \tag{1}$$

in die l-Hauptklasse. Dabei bezeichnet e_Φ den $\mathfrak{g}$-Rang von $\mathfrak{D}_\Phi$ und $\delta_{\bar\Phi}$ den $\mathfrak{g}$-Rang des direkten Faktors $\mathfrak{E}_{0\bar\Phi}$ der Gruppe $\mathfrak{E}_0$ der primären Einheiten-l-Klassen von K.

Insbesondere ist demnach $e_{\bar\Phi} \geqq e_\Phi - \delta_{\bar\Phi}$. Zusammen mit der in Φ gespiegelten Ungleichung ergibt dies den *Spiegelungssatz*:

Satz 2. *Die Differenz der $\mathfrak{g}$-Ränge der zu spiegelbildlich zueinander liegenden Charakteren $\Phi, \bar\Phi$ gehörenden direkten Faktoren $\mathfrak{D}_\Phi$, $\mathfrak{D}_{\bar\Phi}$ der l-Klassengruppe $\mathfrak{D}$ von K ist beschränkt durch die $\mathfrak{g}$-Ränge der entsprechenden direkten Faktoren $\mathfrak{E}_{0\Phi}$, $\mathfrak{E}_{0\bar\Phi}$ der Gruppe $\mathfrak{E}_0$ der primären Einheiten-l-Klassen von K,*

$$\delta_\Phi \geqq e_{\bar\Phi} - e_\Phi \geqq \delta_{\bar\Phi}, \tag{2}$$

und kann den Grad des zu Φ (oder $\bar\Phi$) gehörigen einfachen Charakters dem Betrage nach nicht überschreiten.

2. Wir haben Satz 1 zu beweisen: Dazu gehen wir aus von dem zur Untergruppe $\mathfrak{A}^l$ der Galoisgruppe $\mathfrak{A}$ von N/K gehörigen Teilkörper $\tilde{\mathsf{N}}$. Er ist galoissch über P, seine Galoisgruppe $\tilde{\mathfrak{G}}$ eine — wiederum zerfallende — Erweiterung von $\tilde{\mathfrak{A}} = \mathfrak{A}/\mathfrak{A}^l$ zur Faktorgruppe $\mathfrak{g}$, also

$$\tilde{\mathfrak{G}} = \bigcup_{\sigma} S_\sigma \tilde{\mathfrak{A}}, \quad S_\sigma^{-1} A S_\sigma = A^\sigma, \quad S_\sigma S_\tau = S_{\sigma\tau}. \tag{3}$$

Weiter ist $\tilde{\mathsf{N}}$ eine Kummersche Erweiterung von K, also

$$\tilde{\mathsf{N}} = \mathsf{K}(W),$$

wo W die Radikalgruppe von $\tilde{\mathsf{N}}/\mathsf{K}$, also die Gruppe aller $\omega \neq 0$ aus $\tilde{\mathsf{N}}$ mit $\omega^l \in \mathsf{K}$, bezeichnet. Die Radikalklassengruppe $\mathfrak{W} = W/\mathsf{K}$ ist dann isomorph zu $\tilde{\mathfrak{A}}$,

$$\mathfrak{W} \cong \tilde{\mathfrak{A}},$$

und zwar erhalten wir einen kanonischen Isomorphismus von $\mathfrak{W}$ mit der Charaktergruppe von $\tilde{\mathfrak{A}}$, wenn wir jeder Radikalklasse $\omega\mathsf{K}^\times = \mathfrak{w}$ den durch

$$\omega^A = \mathsf{X}_{\mathfrak{w}}(A)\,\omega, \qquad (A \in \tilde{\mathfrak{A}}), \tag{4}$$

bestimmten Charakter $\mathsf{X}_{\mathfrak{w}}$ von $\tilde{\mathfrak{A}}$ zuordnen:

$$\mathfrak{W} \cong \operatorname{Char} \tilde{\mathfrak{A}}: \qquad \mathfrak{w} \to \mathsf{X}_{\mathfrak{w}}. \tag{5}$$

Nach (4) ist $\mathfrak{W}$ bei $\tilde{\mathfrak{A}}$ elementweise invariant, demnach wird $\mathfrak{W}$ zur $\mathfrak{g}$-Gruppe durch die Festsetzung

$$(\omega\mathsf{K}^\times)^\sigma = \omega^{S_\sigma}\mathsf{K}^\times, \tag{6}$$

und besitzt wiederum eine Zerlegung

$$\mathfrak{W} = \operatorname{dir} \prod_{\Phi} \mathfrak{W}_\Phi, \tag{7}$$

wobei $\mathfrak{W}_\Phi$ die Untergruppe aller Radikalklassen $\mathfrak{w}_\Phi$ mit der Eigenschaft $\mathfrak{w}_\Phi{}^{1\Phi} = \mathfrak{w}_\Phi$ bezeichnet. Nach (6) gilt nun ein Relationensystem

$$\omega_{\mathfrak{w}}{}^{S_\sigma} = \omega_{\mathfrak{w}^\sigma} \cdot \beta_{\mathfrak{w},\sigma} \qquad (\beta_{\mathfrak{w},\sigma} \in \mathsf{K}^\times) \tag{8}$$

für ein Vertretersystem $\omega_{\mathfrak{w}}$ der Radikalklassen. Einerseits ist nun $\omega_{\mathfrak{w}}^{A^\sigma} = \mathsf{X}_{\mathfrak{w}}(A^\sigma)\,\omega_{\mathfrak{w}}$ für $A \in \tilde{\mathfrak{A}}$, andererseits haben wir $\omega_{\mathfrak{w}}^{A^\sigma} = (\omega_{\mathfrak{w}^{\sigma^{-1}}}\beta_{\mathfrak{w},\sigma^{-1}})^{AS_\sigma} = (\mathsf{X}_{\mathfrak{w}^{\sigma^{-1}}}(A)\,\omega_{\mathfrak{w}}^{S_\sigma^{-1}})^{S_\sigma} = \mathsf{X}_{\mathfrak{w}^{\sigma^{-1}}}(A)^\sigma\,\omega_{\mathfrak{w}}$. Damit ist

$$\mathsf{X}_{\mathfrak{w}^{\sigma^{-1}}}(A)^\sigma = \mathsf{X}_{\mathfrak{w}}(A^\sigma)$$

gezeigt. Da nun nach Definition von χ^* die Beziehung $\zeta^\sigma = \zeta^{\chi^*(\sigma)}$ gilt, und da weiter $\mathsf{X}_{\mathfrak{w}}$ auch als Funktion von $\mathfrak{w}$ multiplikativ ist, können wir dies in der Form $\mathsf{X}_{\mathfrak{w}\chi^*(\sigma)\sigma^{-1}}(A) = \mathsf{X}_{\mathfrak{w}}(A^\sigma)$ schreiben. Durch Potenzierung mit $\Phi(\sigma^{-1})/(\mathfrak{g}:1)$ folgt dann nach Multiplikation über σ die *Spiegelungsrelation*

$$\mathsf{X}_{\mathfrak{w}^{1\bar{\Phi}}}(A) = \mathsf{X}_{\mathfrak{w}}(A^{1\Phi}). \tag{9}$$

Ist nun W_Φ diejenige Untergruppe der Radikalgruppe W, der die Radikalklassenuntergruppe $\mathfrak{W}_\Phi$ entspricht, $W_\Phi\mathsf{K}^\times/\mathsf{K}^\times = \mathfrak{W}_\Phi$, und ist weiter $\tilde{\mathsf{N}}_\Phi$ der zur Untergruppe $\mathfrak{A}_\Phi^l$ gehörige maximale elementar-abelsche Teilkörper von N_Φ, so folgt aus der Spiegelungsrelation sofort, daß $\tilde{\mathsf{N}}_\Phi$ die Kummererzeugung

$$\tilde{\mathsf{N}}_\Phi = \mathsf{K}(W_{\bar{\Phi}}) \tag{10}$$

besitzt. Dies ist die algebraische Grundlage unseres Beweises.

Wir ordnen nun jedem Radikal ω seinen Divisor $\mathfrak{c}_\omega \cong \omega$ zu. Nach dem Kummerschen Zerlegungsgesetz gehört $\mathfrak{c}_\omega$ zur Divisorengruppe D von K und die Klasse von $\mathfrak{c}_\omega$ hängt nur ab von der Radikalklasse $\omega\mathsf{K}^\times = \mathfrak{w}$. Bezeichnen wir sie mit $C(\mathfrak{w})$, so ist

$$\mathfrak{w} \to C(\mathfrak{w}) \tag{11}$$

offenbar ein $\mathfrak{g}$-Homomorphismus von $\mathfrak{W}$ in die Gruppe $\tilde{\mathfrak{C}}$ der Divisorenklassen der Ordnung l von K. Insbesondere wird dabei $\mathfrak{W}_{\bar{\Phi}}$ auf eine Untergruppe $\tilde{\mathfrak{C}}'_{\bar{\Phi}} \leq \tilde{\mathfrak{C}}_{\bar{\Phi}}$ abgebildet, welche nach

Konstruktion gemäß (10) in $\tilde{\mathsf{N}}_\Phi$ und damit in N_Φ kapituliert. Ihr entspricht nach Hilfssatz 2 eineindeutig eine zu $\tilde{\mathfrak{C}}'_{\bar{\Phi}}$ isomorphe Untergruppe $\mathfrak{T}'_{\bar{\Phi}}$ von $\mathfrak{T}_{\bar{\Phi}}$, welche in N_Φ in die l-Hauptklasse fällt. Es bleibt nur übrig, den $\mathfrak{g}$-Rang von $\tilde{\mathfrak{C}}'_{\bar{\Phi}}$ zu bestimmen. Ist nun $\mathfrak{W}_0 = \operatorname{dir} \prod_{\Phi} \mathfrak{W}_{0\Phi}$ der Kern der Homomorphie (11), so ist $\mathfrak{W}_{\bar{\Phi}}/\mathfrak{W}_{0\bar{\Phi}} \cong \tilde{\mathfrak{C}}'_{\bar{\Phi}}$. Einerseits ist nun $\mathfrak{W}_{\bar{\Phi}}$ isomorph zur Galoisgruppe $\tilde{\mathfrak{A}}_\Phi$ von $\tilde{\mathsf{N}}_\Phi/\mathsf{K}$ und damit zu $\mathfrak{T}_\Phi/\mathfrak{T}^l_\Phi$, so daß sich

$$(12) \qquad (\mathfrak{W}_{\bar{\Phi}} : 1) = l^{\Phi(1)e_\Phi}$$

ergibt. Andererseits gehört eine Radikalklasse $\mathfrak{w} = \omega\mathsf{K}^\times$ offenbar genau dann zum Kern von (11), wenn sie eine Einheit von $\tilde{\mathsf{N}}$ enthält. Durch nochmalige Anwendung des Kummerschen Zerlegungsgesetzes folgt dann, daß die l-ten Potenzen dieser Einheiten zu K gehören und identisch sind mit denjenigen Einheiten von K, welche primäre Einheiten-l-Klassen von K erzeugen. Insbesondere ist

$$\mathfrak{W}_0 \underset{\mathfrak{g}}{\cong} \mathfrak{E}_0,$$

also auch $\mathfrak{W}_{0\bar{\Phi}} = \mathfrak{E}_{0\bar{\Phi}}$ und demnach

$$(13) \qquad (\mathfrak{W}_{0\bar{\Phi}} : 1) = l^{\bar{\Phi}(1)\delta_{\bar{\Phi}}}.$$

Unter Beachtung von $\bar{\Phi}(1) = \Phi(1)$ ergibt sich aus (12) und (13) auf Grund der Isomorphie $\mathfrak{W}_{\bar{\Phi}}/\mathfrak{W}_{0\bar{\Phi}} \cong \tilde{\mathfrak{C}}'_{\bar{\Phi}} \cong \mathfrak{T}'_{\bar{\Phi}}$ der gesuchte $\mathfrak{g}$-Rang zu

$$e'_{\bar{\Phi}} = e_\Phi - \delta_{\bar{\Phi}},$$

und damit ist Satz 1 bewiesen.

3. Wir heben schließlich noch den Spezialfall eines galoisschen relativ-imaginär-quadratischen Zahlkörpers K hervor, d. h. der galoissche total-imaginäre Zahlkörper K sei die quadratische Erweiterung eines total-reellen Teilkörpers K_0,

$$\mathsf{K} = \mathsf{K}_0(\sqrt{-\partial}) \qquad (\partial \in \mathsf{K}_0, \text{ total-positiv}).$$

Einerseits durchlaufen die Zerlegungskörper der unendlichen Primstellen von K ein volles System konjugierter Teilkörper, in bezug auf welche K relativ-quadratisch ist. Andererseits fallen diese Zerlegungskörper aber sämtlich mit K_0 zusammen. Folglich ist K_0 galoissch und sei als „der" größte reelle Teilkörper von K bezeichnet. Es sei σ_∞ die Erzeugende des zu K_0 gehörigen Normalteilers $\mathfrak{z}$ der Ordnung 2 von $\mathfrak{g}$. Die einfachen Charaktere χ von $\mathfrak{g}$ zerfallen dann in zwei Sorten, nämlich einerseits die Charaktere χ_0 der Faktorgruppe $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}/\mathfrak{z}$, sie sind durch

$$(14_0) \qquad \chi_0(\sigma_\infty) = \chi_0(1)$$

gekennzeichnet, und andererseits in Charaktere χ' mit der Eigenschaft

$$(14') \qquad \chi'(\sigma_\infty) = -\chi'(1).$$

Die ersteren sind die einfachen Bestandteile des vom Hauptcharakter von $\mathfrak{z}$ induzierten Charakters von $\mathfrak{g}$ und seien als *gerade Charaktere* bezeichnet; die letzteren sind die einfachen Bestandteile des vom quadratischen Charakter von $\mathfrak{z}$ induzierten Charakters von $\mathfrak{g}$ und seien als *ungerade Charaktere* bezeichnet. Jeder einfache Charakter ist entweder gerade oder ungerade. Da algebraisch konjugierte Charaktere notwendig zur selben Sorte gehören, können wir diese Bezeichnungsweise von χ auch auf $\Phi = \operatorname{spur}_{\mathfrak{F}}(\chi)$ übertragen. Bei der Spiegelung $\Phi \to \bar{\Phi}$ gehen gerade Charaktere in ungerade über und umgekehrt, denn im vorliegenden Fall ist $l > 2$ und

$$\chi^*(\sigma_\infty) = -1.$$

Nehmen wir an, Φ sei gerade — also $\bar{\Phi}$ ungerade —, so ist notwendig

$$\delta_{\bar{\Phi}} = d_{\bar{\Phi}} = \bar{\chi}\left(\frac{\mathfrak{d}}{(\mathfrak{d}:1)}\right) = 0. \tag{15}$$

In diesem Fall nimmt daher der Spiegelungssatz die folgende einfachere Form an:

Satz 2*. *Der galoissche Zahlkörper* K *sei relativ-imaginär-quadratisch, d. h.* K *sei quadratische Erweiterung,*

$$\mathsf{K} = \mathsf{K}_0(\sqrt{-\partial}), \qquad \partial \in \mathsf{K}_0, \text{ total-positiv},$$

des total-reellen Teilkörpers K_0. *Er enthalte die l-ten Einheitswurzeln* ζ *für die nicht im Grad von* K *aufgehende Primzahl* l. *Die l-adisch irreduziblen Charaktere* Φ $(= \operatorname{spur}_{\bar{\mathfrak{p}}}(\chi))$, $\bar{\Phi}$ *seien Spiegelbilder voneinander, und es sei* Φ *gegenüber* $\bar{\Phi}$ *normiert als der gerade Charakter von beiden. Dann gilt für die* $\mathfrak{g}$*-Ränge* $e_\Phi, e_{\bar{\Phi}}$ *der direkten Faktoren* $\mathfrak{T}_\Phi$, $\mathfrak{T}_{\bar{\Phi}}$ *der l-Klassengruppe* $\mathfrak{T}$ *von* K *und den* $\mathfrak{g}$*-Rang* δ_Φ *des direkten Faktors* $\mathfrak{E}_{0\Phi}$ *der Gruppe* $\mathfrak{E}_0$ *der primären Einheiten-l-Klassen von* K *die Ungleichung*

$$e_\Phi \leqq e_{\bar{\Phi}} \leqq e_\Phi + \delta_\Phi \leqq e_\Phi + \chi(1). \tag{16}$$

Dabei haben wir noch einmal alle Voraussetzungen mit aufgeführt, da sich die an anderem Ort zu gebenden Beispiele und Anwendungen sämtlich auf diese spezielle Form des Spiegelungssatzes beziehen werden.

4. Ist $\mathsf{K} = \mathsf{K}_0(\sqrt{-\partial})$ relativ-imaginär-quadratisch, also K_0 total-reell und ∂ total-positiv, und ist ι der Automorphismus $\sqrt{-\partial} \to -\sqrt{-\partial}$ von K/K_0, so wollen wir eine l-Klasse $\mathfrak{k}$ von $\mathsf{K}(l > 2)$ *reell* nennen, wenn sie zu K_0 gehört ($\mathfrak{k}^\iota = \mathfrak{k}$), und wir wollen sie *imaginär* nennen, wenn ihre Relativnorm nach K_0 in die l-Hauptklasse von K_0 fällt ($\mathfrak{k}^\iota = \mathfrak{k}^{-1}$). Dann ist offenbar die l-Klassengruppe $\mathfrak{T}$ von K das direkte Produkt

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{T}_0 \times \mathfrak{T}^* \tag{17}$$

der Gruppe $\mathfrak{T}_0$ der reellen l-Klassen mit der Gruppe $\mathfrak{T}^*$ der imaginären l-Klassen von K. Es gilt dann

Satz 3. *Der galoissche relativ-imaginär-quadratische Zahlkörper* K *erfülle die Voraussetzungen von Satz 2*. Dann gilt für die Ränge* e_0, e^* *der Gruppe* $\mathfrak{T}_0$ *der reellen l-Klassen bzw. der Gruppe* $\mathfrak{T}^*$ *der imaginären l-Klassen von* K *die Ungleichung*

$$e^* \geqq e_0. \tag{18}$$

Dies wurde für den kleinstmöglichen Körper, nämlich den Körper der l-ten Einheitswurzeln, von Hecke [2] bewiesen, und war in der schwachen Form, daß die Klassenzahl h_K dieses Körpers genau dann durch l teilbar ist, wenn bereits der (für $l > 2$ stets ganze) Klassenzahlquotient $h_\mathsf{K}/h_{\mathsf{K}_0} = h_\mathsf{K}^*$ durch l teilbar ist, bereits von Kummer gezeigt worden. Zum Beweis hat man nur zu beachten, daß

$$\mathfrak{T}_0 = \operatorname{dir} \prod_{\substack{\Phi \\ (\Phi \text{ gerade})}} \mathfrak{T}_\Phi, \qquad \mathfrak{T}^* = \operatorname{dir} \prod_{\substack{\Phi \\ (\Phi \text{ ungerade})}} \mathfrak{T}_\Phi \tag{19}$$

gilt, und den Spiegelungssatz anzuwenden.

Literaturverzeichnis.

[1] *H. Hasse*, Über die Klassenzahl abelscher Zahlkörper. Berlin 1952.

[2] *E. Hecke*, Über nicht-reguläre Primzahlen und den Fermatschen Satz. Gött. Nachr., Math. Phys. Kl. (1910), 420–424.

[3] *F. Pollaczek*, Über die irregulären Kreiskörper der l-ten und l^2-ten Einheitswurzeln. Math. Zeitschr. **21** (1924), 1–38.

[4] *A. Scholz*, Über die Beziehungen der Klassenzahlen quadratischer Körper zueinander. Journ. f. d. reine u. angew. Math. **166** (1931), 201–203.

Eingegangen 15. März 1957.

Ch. Loewners Transformationstheorie der partiellen Differentialgleichungen der Gasdynamik.

F. W. Lewi zum 70. Geburtstag.

Von *M. Pinl* in Köln.

Wir betrachten im folgenden lineare homogene Systeme partieller Differentialgleichungen von zwei Gleichungen in zwei unabhängigen Veränderlichen s, t und zwei abhängigen Veränderlichen ξ, η von der Gestalt:

$$(1) \qquad \zeta_s = H\zeta_t;\ \zeta = \begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix},\ \zeta_s = \begin{pmatrix}\dfrac{\partial\xi}{\partial s}\\ \dfrac{\partial\eta}{\partial s}\end{pmatrix},\ \zeta_t = \begin{pmatrix}\dfrac{\partial\xi}{\partial t}\\ \dfrac{\partial\eta}{\partial t}\end{pmatrix};$$

$$H = \begin{pmatrix}h_{11} & h_{12}\\ h_{21} & h_{22}\end{pmatrix},\ h_{\lambda\mu} = h_{\lambda\mu}(s, t);\ \lambda, \mu = 1, 2.$$

Setzt man für H beziehungsweise die Matrizen

$$\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0 & 1\\ -s & 0\end{pmatrix},$$

so erhält man aus (1) beziehungsweise die Systeme

$$(2) \qquad \text{(a)}\ \begin{aligned}\xi_s &= \eta_t\\ \eta_s &= -\xi_t\end{aligned},\qquad \text{(b)}\ \begin{aligned}\xi_s &= \eta_t\\ \eta_s &= \xi_t\end{aligned},\qquad \text{(c)}\ \begin{aligned}\xi_s &= \eta_t\\ \eta_s &= -s\xi_t\end{aligned}$$

und durch Elimination einer der beiden Funktionen $\xi(s, t)$ und $\eta(s, t)$ die partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung

$$(3) \qquad \text{(a)}\ \begin{aligned}\Delta\xi &= 0\\ \Delta\eta &= 0\end{aligned}\ \text{(Laplace)},\qquad \text{(b)}\ \begin{aligned}\xi_{ss} - \xi_{tt} &= 0\\ \eta_{ss} - \eta_{tt} &= 0\end{aligned}\ \text{(d'Alembert)},$$

$$\text{(c)}\ \begin{aligned}\xi_{ss} + s\xi_{tt} &= 0\\ \eta_{ss} + s\eta_{tt} &= \frac{1}{s}\eta_s\end{aligned}\ \text{(Tricomi)}.$$

Der Prozeß dieser Elimination verläuft eindeutig. Umgekehrt können die Eliminanten (3) aus unendlich vielen verschiedenen Systemen (2) entstehen[1]). Ein solches „Vorschalten" geeigneter allgemeinerer Klassen von Systemen, die sich in die Systeme (2) transformieren lassen und auf diese Weise auch auf die Eliminanten (3) führen, wird durch die

---

[1]) Dies trifft bereits für algebraische Gleichungen zu; $x = \cos\varphi$, $y = \sin\varphi$ und $x = f(s)$, $y = \sqrt{1 - f^2(s)}$ liefern z. B. dieselbe Eliminante $x^2 + y^2 = 1$.

Theorie der Bäcklundschen Transformationen ermöglicht, auf Grund welcher Ch. Loewner eine neue Theorie der Transformationen der partiellen Differentialgleichungen der Gasdynamik entwickelt hat [2]), über deren wesentliche Züge im folgenden berichtet werden soll [3]).

Bekanntlich genügen die Potential- und die Stromfunktion einer ebenen stationären wirbelfreien kompressiblen Strömung bei Wahl geeigneter unabhängiger Veränderlicher in der Hodographenebene und bei Approximation der wirklichen Zustandsgleichung durch die linearisierte Zustandsgleichung

$$p = -\frac{a}{\varrho} + b$$

(für den Druck p und die Dichte ϱ mit Konstanten $a > 0$, b) den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen. Umgekehrt erscheint so den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen die linearisierte Zustandsgleichung zugeordnet, ihren „Bäcklundtransformierten" jedoch im Sinne der Ch. Loewnerschen Theorie weit allgemeinere Klassen von Zustandsgleichungen und ebenso den „Bäcklundtransformierten" der Systeme (1b) und (1c). Im Gewinn zahlreicher solcher Zustandsgleichungen liegt die physikalische Bedeutung der neuen Transformationstheorie.

§ 1. Bäcklundsche Transformationen.

Das nach A. V. Bäcklund benannte Problem wurde zunächst im dreidimensionalen Raum der Koordinaten x, y, z gestellt und besteht in diesem Raume darin, *zwei Elementvereine M_2 und M_2' zu bestimmen, die eine eineindeutige Abbildung aufeinander in der Weise gestatten, daß je zwei dabei einander entsprechende Elemente*

$$(x, y, z, p, q) \text{ und } (x', y', z', p', q')$$

den vier vorgegebenen Bedingungen

$$F^{(i)}(x, y, z, p, q;\ x', y', z', p', q') = 0, \quad i = 1, 2, 3, 4 \tag{4}$$

genügen. Dabei werden entweder x', y', z', z als Funktionen der unabhängigen Veränderlichen x, y oder x, y, z, z' als Funktionen der unabhängigen Veränderlichen x', y' aufgefaßt. In beiden Fällen sind die Gleichungen (4) vier Bedingungen für vier unbekannte Funktionen. Der wichtigste Fall liegt vor, wenn die Elementvereine M_2 und M_2' die Tangentialelemente je einer Trägerfläche Σ und Σ' darstellen. Sind dann $z = z(x, y)$ und $z' = z'(x', y')$ die Gleichungen dieser Flächen, so erhalten die p, q, p', q' die übliche Bedeutung erster Ableitungen. Die Gleichungen (4) gelten identisch in den unabhängigen Veränderlichen, aber nicht identisch in den abhängigen Veränderlichen. Vielmehr ergibt sich im allgemeinen Falle nach zweimaliger Differentiation nach x, y und Elimination der 22 gestrichenen Veränderlichen $x', y', \ldots, q'_{yy}$ aus den 24 Gleichungen

$$F^{(i)} = 0,\ F^{(i)}_x = 0,\ F^{(i)}_y = 0,\ F^{(i)}_{xx} = 0,\ F^{(i)}_{xy} = 0,\ F^{(i)}_{yy} = 0, \quad i = 1, 2, 3, 4$$

ein Bedingungssystem von zwei partiellen Differentialgleichungen dritter Ordnung für $z(x, y)$ und ebenso ein solches für $z'(x', y')$ nach zweimaliger Differentiation nach x', y' und Elimination der 22 ungestrichenen Veränderlichen $x, y, \ldots, q_{y'y'}$ aus den 24 Gleichungen

$$F^{(i)} = 0,\ F^{(i)}_{x'} = 0,\ F^{(i)}_{y'} = 0,\ F^{(i)}_{x'x'} = 0,\ F^{(i)}_{x'y'} = 0,\ F^{(i)}_{y'y'} = 0, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

---

[2]) Vgl. *Ch. Loewner*, A transformation theory of the partial differential equations of gas dynamics, NACA Technical Note 2065, Washington 1950.

[3]) Wesentliche Teile dieses Berichtes hat der Verf. auf der österreichischen internationalen Mathematikertagung in Wien (September 1956), im physikalischen Colloquium der Universität Köln (Januar 1957) und in der Gesellschaft für Wissenschaft und Leben im Rhein.-Westf. Industriegebiet e. V. Essen (Juni 1957) vorgetragen.

Nur die Integralflächen dieser partiellen Differentialgleichungen dritter Ordnung ergänzen einander im allgemeinen Falle zu Bäcklundschen Flächenpaaren, die einander durch die Bäcklundschen Transformationen zugeordnet werden [4]).

Die Anwendung dieser Theorie auf die Differentialgleichungen der Gasdynamik beruht einerseits auf einer Verallgemeinerung, andererseits auf einer Spezialisierung. Da es sich in (2) stets um zwei abhängige Veränderliche $\xi(s, t)$, $\eta(s, t)$ handelt, muß die Dimensionszahl des Darstellungsraumes der geometrisch gedeuteten Theorie um eine Dimension erhöht werden: die Trägerflächen der Elementvereine M_2 und M_2' sind jetzt zweidimensionale Flächen

$$s = s,\ t = t,\ \xi = \xi(s, t),\ \eta = \eta(s, t)$$

im vierdimensionalen Raum der Koordinaten s, t, ξ, η, und an Stelle der Bedingungen (4) treten die sechs Bäcklundschen Transformationen

$$(5)\quad G^{(i)}(s, t, \xi, \eta, \xi_s, \eta_s, \xi_t, \eta_t; s', t', \xi', \eta', \xi'_{s'}, \xi'_{t'}, \eta'_{s'}, \eta'_{t'}) = 0, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

entsprechend der Anzahl der abhängigen Veränderlichen $s', t', \xi', \eta', \xi, \eta$ (wenn s, t unabhängig) bzw. $s, t, \xi, \eta, \xi', \eta'$ (wenn s', t' unabhängig). Wiederum ergänzen nur die Integralflächen partieller Eliminantensysteme dritter Ordnung einander im allgemeinen Falle zu Bäcklundschen Flächenpaaren, und zwar ergeben sich jetzt vier partielle Differentialgleichungen dritter Ordnung für das Funktionenpaar $\xi(s, t)$, $\eta(s, t)$ einer Fläche Σ durch Elimination von 32 gestrichenen Variablen $s', t', \ldots, \eta'_{t'u}$ aus den 36 Gleichungen

$$G^{(i)} = 0,\ G^{(i)}_s = 0,\ G^{(i)}_t = 0,\ G^{(i)}_{ss} = 0,\ G^{(i)}_{st} = 0,\ G^{(i)}_u = 0, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

und ebenso vier partielle Differentialgleichungen dritter Ordnung für das Funktionenpaar $\xi'(s', t')$, $\eta'(s', t')$ einer Fläche Σ' durch Elimination von 32 ungestrichenen Variablen $s, t, \ldots, \eta_{u't'}$ aus den 36 Gleichungen

$$G^{(i)} = 0,\ G^{(i)}_{s'} = 0,\ G^{(i)}_{t'} = 0,\ G^{(i)}_{s's'} = 0,\ G^{(i)}_{s't'} = 0,\ G^{(i)}_{t't'} = 0, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5, 6.$$

Nach dieser Verallgemeinerung der geometrischen Interpretation kommt es jetzt auf eine den Erfordernissen der Gasdynamik angemessene Spezialisierung der Bäcklundschen Transformationen (5) an.

§ 2. Reduktion auf lineare homogene Eliminanten erster Ordnung.

Um zu einer praktischen Anwendung Bäcklundscher Transformationen auf die Differentialgleichungssysteme der (ebenen) Gasdynamik zu kommen, beziehen wir die Flächen ξ, η und ξ', η' des vierdimensionalen Raumes auf ein gemeinsames Parametersystem und setzen:

$$G^{(1)} = s - s' = 0, \quad G^{(2)} = t - t' = 0.$$

---

[4]) Vgl. *A. V. Bäcklund*, Zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, Mathematische Annalen **17** (1880), S. 285; Zur Theorie der Flächentransformationen, ibidem **19** (1882), S. 387; Zur Transformationstheorie partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung, Lund Universitets Arsskrift **31** (1920). Die Bäcklundschen Transformationen (4) bestehen aus 4 Gleichungen für 5 Unbekannte, z. B. x', y', z', p', q'. Durch Differentiation (z. B.) nach x und y kommen weitere 8 Gleichungen, aber auch weitere 7 neue Unbekannte hinzu. Erst durch abermalige Differentiation (z. B.) nach x und y erhält man mehr Gleichungen hinzu (nämlich 12) als Unbekannte (nämlich 10) und damit insgesamt 24 Gleichungen für 22 Unbekannte. Analog bilden die Bäcklundschen Transformationen (5) ein System von 6 Gleichungen für 8 Unbekannte. Nach einmaliger Differentiation (z. B.) nach s und t kommen 12 Gleichungen und 10 Unbekannte neu hinzu. Erst nach zweimaliger Differentiation (z. B.) nach s und t erhält man insgesamt mehr Gleichungen (nämlich $6 + 12 + 18 = 36$) als Unbekannte (nämlich $8 + 10 + 14 = 32$).

Die verbleibenden vier der Gleichungen (5) setzen wir homogen linear an und schreiben sie als ein System von zwei Matrizengleichungen in der Gestalt:

$$(6)\qquad \begin{aligned} \zeta'_{s'} = \zeta'_s &= R\zeta_s + T\zeta_t + A\zeta + C\zeta', \\ \zeta'_{t'} = \zeta'_t &= S\zeta_s + W\zeta_t + B\zeta + D\zeta', \end{aligned} \qquad \begin{vmatrix} R & T \\ S & W \end{vmatrix} \neq 0.$$

Dabei sind die Elemente $\alpha^\lambda_\mu, \beta^\lambda_\mu, \gamma^\lambda_\mu, \delta^\lambda_\mu, \varrho^\lambda_\mu, \sigma^\lambda_\mu, \tau^\lambda_\mu, \omega^\lambda_\mu$ der Matrizen A, B, C, D, R, S, T, W im allgemeinen Funktionen der Parameter s und t ($\lambda, \mu = 1, 2$). Die Matrizen C und D spezialisieren wir jetzt weiter so, daß sie der Bedingung

$$D_s - C_t + DC - CD = 0$$

genügen. Dann reduziert sich das Eliminantensystem für die Funktionen $\xi(s, t)$ und $\eta(s, t)$ (der Integrabilitätsbedingung $\zeta'_{ts} = \zeta'_{st}$ entsprechend) auf die partielle Matrizendifferentialgleichung zweiter Ordnung:

$$\begin{aligned} (7)\quad & S\zeta_{ss} + (W - R)\,\zeta_{st} - T\zeta_{tt} + (S_s - R_t + B + DR - CS)\,\zeta_s \\ & + (W_s - T_t - A + DT - CW)\,\zeta_t + (DA - CB + B_s - A_t)\,\zeta = 0, \end{aligned}$$

welche zwei partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung darstellt. Um deren Ordnung weiter zu reduzieren, unterwerfen wir die Matrizen R, S, T, W den zusätzlichen erlaubten Bedingungen

$$(8)\qquad W = R, S = T = 0, \qquad \begin{vmatrix} W & 0 \\ 0 & W \end{vmatrix} \neq 0.$$

Sie reduzieren die Bäcklundschen Transformationen (6) auf

$$(9)\qquad \boxed{\begin{aligned} &\zeta'_s = W\zeta_s + A\zeta + C\zeta',\ \zeta_s = W'\zeta'_s + A'\zeta' + C'\zeta,\ A' = -W^{-1}C, C' = -W^{-1}A, \\ &\zeta'_t = W\zeta_t + B\zeta + D\zeta',\ \zeta_t = W'\zeta'_t + B'\zeta' + D'\zeta, B' = -W^{-1}D, D' = -W^{-1}B, \end{aligned} \quad W' = W^{-1}.}$$

Um ein explizites Auftreten der Matrix ζ der abhängigen Funktionen $\xi(s, t)$, $\eta(s, t)$ zu verhindern, verlangen wir noch das Bestehen der Bedingung:

$$B_s - A_t + DA - CB = 0$$

und erhalten das Resultat:

Die Bäcklundschen Transformationen (9) *verwandeln das lineare homogene System erster Ordnung*

$$\boxed{(-W_t + B + DW)\,\zeta_s + (W_s - A - CW)\,\zeta_t = 0}$$

in das lineare homogene System erster Ordnung

$$\boxed{(-W'_t + B' + D'W')\,\zeta'_s + (W'_s - A' - C'W')\,\zeta'_t = 0}$$

und umgekehrt, wenn die Koeffizienten A, B, C, D bzw. A', B', C', D' den Bedingungen

$$(10)\qquad \begin{aligned} D_s - C_t + DC - CD &= 0 \\ B_s - A_t + DA - CB &= 0 \end{aligned} \qquad \textit{bzw.} \qquad \begin{aligned} D'_s - C'_t + D'C' - C'D' &= 0 \\ B'_s - A'_t + D'A' - C'B' &= 0 \end{aligned}$$

genügen.

Da die Matrizen A', B', C', D' aus A, B, C, D durch Multiplikation mit der inversen Matrix W^{-1} hervorgehen, sind die Bedingungen (10) sechszehn Bedingungen für zwanzig Elemente α_μ^λ, β_μ^λ, γ_μ^λ, δ_μ^λ, ω_μ^λ. Man kann daher noch vier weitere Bedingungen in geeigneter Weise hinzunehmen und noch immer unendlich viele Lösungen für die Differentialgleichungen (10) erwarten. Wir wählen für diese vier weiteren Bedingungen die Matrizengleichung

$$AB^{-1} = CD^{-1},$$

welche aus den beiden Matrizengleichungen

$$A = HB,\ C = HD \tag{11}$$

durch Elimination von H hervorgeht. Jetzt ergeben die Bäcklundschen Transformationen (9) die Matrizengleichung:

$$\zeta'_s - H\zeta'_t = W\zeta_s - HW\zeta_t$$

und verwandeln insbesondere die Matrizendifferentialgleichung

$$\zeta'_s = H\zeta'_t$$

in die Matrizendifferentialgleichung

$$\zeta_s = W^{-1}HW\zeta_t.$$

Da dieses letzte Resultat aber mit

$$(-W_t + B + DW)\,\zeta_s + (W_s - A - CW)\,\zeta_t = 0$$

äquivalent sein muß, folgt

$$W_s - HB - HDW = (W_t - B - DW)\,W^{-1}HW. \tag{12}$$

Berücksichtigen wir noch in (10) die neu hinzugekommenen Beziehungen (11), so ergibt sich zusammen mit (12) für die Matrizen B, D, W das Cauchy-Kowalewskische System

$$\boxed{\begin{aligned} &D_s - (HD)_t + DHD - HD^2 &&= 0,\\ &B_s - (HB)_t + DHB - HDB &&= 0,\\ &W_s - HB - HDW &&= (W_t - B - DW)\,W^{-1}HW \end{aligned}} \tag{13}$$

(mit vorgegebener Matrix H) und man erhält das Resultat:

Genügen die Matrizen B, D, W dem Cauchy-Kowalewskischen System (13), *so transformiert die Bäcklundtransformation*

$$\zeta'_s = W\zeta_s + HB\zeta + HD\zeta',\ \zeta'_t = W\zeta_t + B\zeta + D\zeta'$$

das System $\zeta_s = W^{-1}HW\zeta_t$ in das System $\zeta'_s = H\zeta'_t$.

Das Cauchy-Kowalewskische System (13) enthält 12 Gleichungen erster Ordnung für 12 unbekannte Funktionen der beiden unabhängigen Veränderlichen s und t. Den Integralflächen dieses Systems kann im Rahmen des Existenzsatzes eine Anfangskurve $t = t(s)$ vorgeschrieben werden, längs welcher sich die 12 Lösungsfunktionen auf vorgeschriebene Funktionen einer Variablen reduzieren. Die Lösungen des Systems (13) hängen also noch von 12 willkürlichen Funktionen einer Veränderlichen ab trotz der zahlreichen einschränkenden Bedingungen, welchen die zugelassenen Bäcklundtransformationen unterworfen worden sind.

Im Gegensatz zu den bekannten Eigenschaften der Berührungstransformationen reicht die Anzahl der definierenden Relationen einer Bäcklundtransformation, z. B. im dreidimensionalen Raum gegeben durch

$$F^{(i_1)}(x, y, z, p, q;\ x', y', z', p', q') = 0, \quad i_1 = 1, 2, 3, 4,$$

nicht aus, um zusammen mit einer zweiten solchen

$$F^{(i_2)}(x', y', z', p', q';\ x'', y'', z'', p'', q'') = 0, \ i_2 = 1, 2, 3, 4$$

etwa durch Auflösen nach x', y', z', p', q' der ersten und Einsetzen in die zweite eine „resultierende" Bäcklundtransformation

$$F^{(i_3)}(x, y, z, p, q;\ x'', y'', z'', p'', q'') = 0, \ i_3 = 1, 2, 3, 4$$

zu gewinnen (im Falle von Berührungstransformationen bestünde $i_1 = i_2 = i_3 = 1,2,3,4,5$). Ähnlich wie im Falle der Berührungstransformationen kann man auch im Falle von Bäcklundtransformationen nach E. Goursat [5]) assoziierte Pfaffsche Formen zu deren Charakterisierung heranziehen. Während jedoch z. B. die Invarianz der Paffschen Form

$$dz - pdx - qdy$$

im Falle von Berührungstransformationen des dreidimensionalen Raumes deren Gruppeneigenschaft garantiert, bilden die Bäcklundtransformationen keine Gruppe. Auch führen zusätzliche Forderungen nach invarianten Berührungen höherer Ordnung (Oskulationen usw.) stets wieder auf Berührungstransformationen zurück, wie bereits A. V. Bäcklund und S. Lie erkannt haben [6]).

Gleichwohl hat Ch. Loewner Bedingungen untersucht, unter welchen eine einparametrige Matrizenschar $H(s, t; \tau)$ eine Fortsetzung einer Lösung $\zeta(s, t; \tau)$ der Differentialgleichung $\zeta_s = H(s, t; \tau)$, die für einen speziellen Wert τ' des Parameters τ aus dem Intervall $\tau_0 \leqq \tau' \leqq \tau_1$ gilt, für alle Werte τ des Intervalls gestattet, und ist auf diese Weise zu einer Theorie infinitesimaler Bäcklundtransformationen vorgedrungen [7]).

§ 3. Die aerodynamisch wichtigen H-Matrizen.

Auch die endlichen Bäcklundtransformationen (9) sind für aerodynamische Probleme noch zu allgemein. Für die Matrizen H der Theorie stationärer ebener wirbelfreier kompressibler Strömungen verschwinden die Elemente der Hauptdiagonale, und die der Nebendiagonale hängen nur von einer der beiden unabhängigen Veränderlichen ab. Die zweite dieser Eigenschaften bleibt erhalten, wenn man annimmt, daß die Koeffizienten der Bäcklundtransformation (9) nur von einer Veränderlichen, etwa s, abhängen. Dann verwandeln sich die Gleichungen des Cauchy-Kowalewskischen Bedingungssystems in ein System von drei Matrizen- bzw. zwölf gewöhnlichen Differentialgleichungen, dessen Lösungen nunmehr von zwölf willkürlichen Konstanten abhängen. Von diesen Lösungen

---

[5]) Vgl. *E. Goursat*, Sur le problème de Bäcklund et les systemes de deux équations de Pfaff, Annales de la Faculté de Toulouse (3) **10** (1918); Sur quelques transformations d'équations aux dérivées partielles, Bulletin des Sciences mathématiques (2) **46** (1922), p. 370; Le Problème de Bäcklund, Mémorial des Sciences, Fascicule VI, Paris 1925.

[6]) Vgl. *S. Lie*, Gesammelte Abh. II_2, 810—811; Leipzig 1937.

[7]) Vgl. *Ch. Loewner*, Generation of solutions of partial differential equations by composition of partial infinitesimal Bäcklund transformations. Journal d'Analyse Mathématique **2** (Jerusalem 1952), pp. 219—242.

sind aber nur die von Interesse, für welche auch die erste Eigenschaft der aerodynamisch wichtigen H-Matrizen erhalten bleibt[8]). Dazu genügt es die Matrix W als Diagonalmatrix anzunehmen. Denn dann gilt

$$W = \begin{pmatrix} \omega_1^1 & 0 \\ 0 & \omega_2^2 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 0 & h_{12} \\ h_{21} & 0 \end{pmatrix}, \quad W^{-1}HW = \begin{pmatrix} 0 & h_{12}\dfrac{\omega_2^2}{\omega_1^1} \\ h_{21}\dfrac{\omega_1^1}{\omega_2^2} & 0 \end{pmatrix},$$

so daß die Hauptdiagonalelemente für beide der durch die Bäcklundtransformation verbundenen Systeme

$$\zeta_s' = H\zeta_t', \quad \zeta_s = W^{-1}HW\zeta_t$$

verschwinden.

Im Falle von Differentialgleichungen $\zeta_s = W^{-1}HW\zeta_t$, welche sich in die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen transformieren lassen, gilt, wenn wir einfacher $\omega_1 = \omega_1^1$, $\omega_2 = \omega_2^2$ schreiben:

$$W^{-1}HW = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\omega_1} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{\omega_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 & 0 \\ 0 & \omega_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ -\dfrac{1}{\omega} & 0 \end{pmatrix}, \quad \omega = \frac{\omega_2}{\omega_1}.$$

Diese Differentialgleichungen sind also von der Form:

$$\text{(A)} \qquad \boxed{\xi_s = \omega\eta_t, \quad \eta_s = -\frac{1}{\omega}\xi_t.}$$

Da die Matrizenelemente nach Voraussetzung nur von s abhängen, reduziert sich das zugehörige Cauchy-Kowalewskische System (13) auf das System gewöhnlicher Matrizendifferentialgleichungen

$$\text{(14)} \qquad \begin{gathered} D_s + DHD - HD^2 = 0, \; B_s + DHB - HDB = 0, \\ W_s - HB - HDW = -(B + DW)\,W^{-1}HW. \end{gathered}$$

Die allgemeine Lösung dieses Systems hängt von zwölf willkürlichen Parametern ab. Eine sechsparametrige Teilschar liefert der Ansatz

$$\text{(15)} \qquad W = \begin{pmatrix} \omega_1 & 0 \\ 0 & \omega_2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & \delta_1 \\ \delta_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & \beta_1 \\ \beta_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Führen wir für die Matrizenelemente $h_{\lambda\mu}$ noch die Bezeichnungen $h_1 = h_{12}$, $h_2 = h_{21}$ ein, so ergibt sich aus (15)

$$DHD = \begin{pmatrix} 0 & h_2\delta_1^2 \\ h_1\delta_2^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad HD^2 = \begin{pmatrix} 0 & h_1\delta_1\delta_2 \\ h_2\delta_1\delta_2 & 0 \end{pmatrix}$$

und daher für die erste der Matrizengleichungen (14) das System

$$\text{(16)} \qquad \frac{d\delta_1}{ds} + h_2\delta_1^2 - h_1\delta_1\delta_2 = 0, \quad \frac{d\delta_2}{ds} + h_1\delta_2^2 - h_2\delta_1\delta_2 = 0.$$

---

[8]) Diese Eigenschaft bringt die Möglichkeit, die Differentialgleichungen aus einem Variationsprinzip abzuleiten, zum Ausdruck, vgl. [2]), S. 16.

Durch Multiplikation der ersten der Gleichungen (16) mit δ_2, der zweiten mit δ_1 und Addition folgt $\frac{d}{ds}(\delta_1\delta_2) = 0$. Wir können demnach das Produkt $\delta_1\delta_2$ durch die Konstante $-a$ ersetzen und erhalten damit aus der ersten der beiden Gleichungen (16) für $\delta_1(s)$ die Riccatische Differentialgleichung

$$\frac{d\delta_1}{ds} + h_2\delta_1^2 + ah_1 = 0. \tag{17}$$

Ist $a \neq 0$, so wird die zweite der Gleichungen (16) durch $\delta_2 = \frac{-a}{\delta_1}$ befriedigt. Ist jedoch $a = 0$, so ist auch $\delta_2 = 0$, wenn $\delta_1 \neq 0$. Sind auf diese Weise die Elemente der Matrix D durch Integration der Riccatischen Differentialgleichung (17) ermittelt, so kann man sich der Bestimmung der Elemente der Matrix B der zweiten Matrizengleichung im System (14) zuwenden. Zunächst berechnet man

$$DHB - HDB = \begin{pmatrix} 0 & \beta_1(\delta_1 h_2 - \delta_2 h_1) \\ -\beta_2(\delta_1 h_2 - \delta_2 h_1) & 0 \end{pmatrix}.$$

Damit ergibt sich für die zweite Matrizengleichung des Systems (14) das System:

$$\frac{d\beta_1}{ds} + (\delta_1 h_2 - \delta_2 h_1)\,\beta_1 = 0, \quad \frac{d\beta_2}{ds} - (\delta_1 h_2 - \delta_2 h_1)\,\beta_2 = 0. \tag{18}$$

Der Vergleich von (18) mit (16) zeigt:

Sind die Elemente der Matrix D bekannt, so können diejenigen der Matrix B ohne weitere Integration unmittelbar angegeben werden.

Beweis: im allgemeinen Fall $a \neq 0$ sind δ_1 und δ_2 nicht beide gleich Null, und die Lösungen von (16) und (18) unterscheiden sich nur durch einen konstanten Faktor:

$$\beta_1 = c_1\delta_1, \quad \beta_2 = c_2\delta_2; \quad c_1, c_2 \text{ konstant.}$$

Im Falle $a = 0$ und etwa $\delta_1 = 0$, $\delta_2 \neq 0$ gilt

$$\beta_1 = \frac{c_1}{\delta_2}, \quad \beta_2 = c_2\delta_2.$$

Im Falle $\delta_1 = \delta_2 = 0$ gilt

$$\beta_1 = c_1, \quad \beta_2 = c_2.$$

Die dritte der Matrizengleichungen (14) erheischt die Berechnung der folgenden Matrizenprodukte:

$$HB = \begin{pmatrix} 0 & h_1 \\ h_2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \beta_1 \\ \beta_2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1\beta_2 & 0 \\ 0 & h_2\beta_1 \end{pmatrix},$$

$$HDW = \begin{pmatrix} 0 & h_1 \\ h_2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \delta_1 \\ \delta_2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \omega_1 & 0 \\ 0 & \omega_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1\delta_2\omega_1 & 0 \\ 0 & h_2\delta_1\omega_2 \end{pmatrix},$$

$$W^{-1}HW = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \omega_1 & \\ 0 & \frac{1}{\omega_2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & h_1 \\ h_2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \omega_1 & 0 \\ 0 & \omega_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & h_1\frac{\omega_2}{\omega_1} \\ h_2\frac{\omega_1}{\omega_2} & 0 \end{pmatrix},$$

$$B(W^{-1}HW) = \begin{pmatrix} 0 & \beta_1 \\ \beta_2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & h_1\frac{\omega_2}{\omega_1} \\ h_2\frac{\omega_1}{\omega_2} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 h_2\frac{\omega_1}{\omega_2} & 0 \\ 0 & \beta_2 h_1\frac{\omega_2}{\omega_1} \end{pmatrix},$$

$$DHW = \begin{pmatrix} 0 & \delta_1 \\ \delta_2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & h_1 \\ h_2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \omega_1 & 0 \\ 0 & \omega_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_1 h_2\omega_1 & 0 \\ 0 & \delta_2 h_1\omega_2 \end{pmatrix}$$

und führt auf die Differentialgleichungen

$$(19)\qquad \begin{aligned} &\frac{d\omega_1}{ds} - h_1\beta_2 - h_1\delta_2\omega_1 + \beta_1 h_2 \frac{\omega_1}{\omega_2} + \delta_1 h_2 \omega_1 = 0, \\ &\frac{d\omega_2}{ds} - h_2\beta_1 - h_2\delta_1\omega_2 + \beta_2 h_1 \frac{\omega_2}{\omega_1} + \delta_2 h_1 \omega_2 = 0. \end{aligned}$$

Multiplikation der ersten der Gleichungen (19) mit ω_2, der zweiten mit ω_1 und Addition ergibt

$$\frac{d\omega_1}{ds}\omega_2 + \omega_1 \frac{d\omega_2}{ds} = \frac{d}{ds}(\omega_1\omega_2) = 0, \text{ d. h. } \omega_1\omega_2 = b.$$

Da W nicht singulär ist, ist die Konstante b notwendig von Null verschieden. Somit kann auch das System (19) auf eine Riccatische Differentialgleichung für ω_1 oder ω_2 zurückgeführt werden, und man erhält etwa aus der ersten der Gleichungen (19)

$$(20)\qquad \frac{d\omega_1}{ds} + \frac{\beta_1 h_2}{b}\omega_1^2 + (\delta_1 h_2 - \delta_2 h_1)\,\omega_1 - h_1\beta_2 = 0,$$

indem man ω_2 durch $\dfrac{b}{\omega_1}$ ersetzt.

Wir betrachten jetzt die erhaltenen Riccatischen Differentialgleichungen im Cauchy-Riemannschen Falle $h_1 = 1$, $h_2 = -1$. Aus (17) und (20) folgt

$$(21)\qquad \frac{d\delta_1}{ds} - \delta_1^2 + a = 0, \quad \frac{d\omega_1}{ds} - \frac{\beta_1}{b}\omega_1^2 - (\delta_1 + \delta_2)\,\omega_1 - \beta_2 = 0.$$

Eine spezielle Lösung der ersten der Gleichungen (21) ist (wegen $a = -\delta_1\delta_2$) durch $\delta_1 = \delta_2 = 0$ gegeben. Mit dieser Lösung wird auch die zweite Gleichung (21) elementar integrabel. Zunächst erhält man mit willkürlichen Konstanten $\lambda_1 = \dfrac{\beta_1}{b}$, $\lambda_2 = \beta_2$ die Differentialgleichung

$$\frac{d\omega_1}{ds} - \lambda_1\omega_1^2 - \lambda_2 = 0$$

und aus dieser die folgenden drei- bzw. zweiparametrigen Lösungsscharen:

(Ia) $\omega_1 = A \coth \alpha(s - s_0)$, (Ib) $\omega_1 = A \operatorname{tgh} \alpha(s - s_0)$, $\operatorname{sign} \lambda_1 \neq \operatorname{sign} \lambda_2$,

(II) $\omega_1 = A \operatorname{tg} \alpha(s - s_0)$, $\operatorname{sign} \lambda_1 = \operatorname{sign} \lambda_2$,

(IIIa) $\omega_1 = \dfrac{1}{\alpha s + \beta}$, (IIIb) $\omega_1 = \alpha s + \beta$, λ_1 oder $\lambda_2 = 0$;

A, α, s_0, β willkürliche Konstanten.

Da stets $\omega_1\omega_2 = b$ gilt, erhalten wir für den Quotienten $\omega = \dfrac{\omega_2}{\omega_1}$ die Ausdrücke

$$(22)\qquad \boxed{\begin{aligned} &\omega = C \operatorname{tgh}^2 \alpha(s - s_0), \quad \omega = C \coth^2 \alpha(s - s_0) \\ &\omega = C \cot^2 \alpha(s - s_0), \\ &\omega = \pm(\alpha s + \beta)^2, \qquad \omega = \pm(\alpha s + \beta)^{-2}, \end{aligned}}$$

worin auch C (in den ersten drei dieser Gleichungen) eine beliebige Konstante bedeutet.

Jede dieser Funktionen $\omega(s)$ führt auf eine drei- bzw. zweiparametrige Schar von Differentialgleichungen (A), die in die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen transformiert werden können.

Im Falle von Differentialgleichungen $\zeta_s = W^{-1}HW\zeta_t$, welche sich in solche (2b) transformieren lassen, aus welchen die d'Alembertschen Gleichungen (3b) hervorgehen, gilt

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad W^{-1}HW = \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ \frac{1}{\omega} & 0 \end{pmatrix}.$$

Diese Differentialgleichungen sind also von der Form:

$$\text{(B)} \qquad \boxed{\xi_s = \omega\eta_t, \quad \eta_s = \frac{1}{\omega}\xi_t}.$$

Für $\omega(s)$ können dieselben Ausdrücke verwendet werden wie für die Differentialgleichungen der Klasse (A).

Im Falle von Differentialgleichungen $\zeta_s = W^{-1}HW\zeta_t$, welche sich in solche (2c) transformieren lassen, aus welchen die eine oder die andere Form der Differentialgleichungen (3c) von Tricomi hervorgeht, gilt z. B.

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -s & 0 \end{pmatrix}, \quad W^{-1}HW = \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ \frac{-s}{\omega} & 0 \end{pmatrix}.$$

Diese Differentialgleichungen sind demnach von der Form

$$\text{(C)} \qquad \boxed{\xi_s = \omega\eta_t, \quad \eta_s = -\frac{s}{\omega}\xi_t}.$$

Für $\omega(s)$ ergibt sich in diesem Falle die Riccatische Differentialgleichung

$$\frac{d\omega_1}{ds} - \lambda_1 s\omega_1^2 - \lambda_2 = 0, \quad \left(\lambda_1 = \frac{\beta_1}{b}, \quad \lambda_2 = \beta_2\right)$$

und — sobald eine der beiden Konstanten λ_1, λ_2 verschwindet — die elementare Lösung

$$\omega_1 = \alpha s + \beta, \ \lambda_1 = 0; \ \alpha, \beta \text{ willkürliche Konstanten,}$$

$$\omega_1 = \frac{1}{\alpha s^2 + \beta}, \ \lambda_2 = 0; \ \alpha, \beta \text{ willkürliche Konstanten.}$$

Entsprechend gewinnt man für $\omega(s)$ in (C) die beiden Ausdrücke:

$$\omega = \pm(\alpha s^2 + \beta)^2 \text{ bzw. } \omega = \frac{\pm 1}{(\alpha s + \beta)^2}.$$

Die Transformation der unabhängigen Veränderlichen

$$s^* = \int_{s_0}^{s} \omega(\sigma)\, d\sigma, \quad t^* = t$$

verwandelt die Differentialgleichungen (C) in die bisweilen zweckmäßigere Form:

$$\text{(C*)} \qquad \boxed{\xi_{s^*} = \eta_{t^*}, \quad \eta_{s^*} = -\omega^*(s^*)\,\xi_{t^*}}.$$

Dabei gilt, wenn ω durch $\pm(\alpha s + \beta)^{-2}$ gegeben ist:

$$s^* = \frac{\pm s}{\beta(\alpha s + \beta)} + s_0^*, \quad \omega^*(s^*) = \frac{\pm\beta^6(s^* - s_0^*)}{[1 \pm \alpha\beta(s^* - s_0^*)]^5}.$$

§ 4. Zustandsgleichungen.

Sind q und ϑ Polarkoordinaten in der Hodographenebene, so bestehen in diesen unabhängigen Veränderlichen für die Potentialfunktion Φ und die Stromfunktion Ψ einer ebenen stationären adiabatisch kompressiblen Strömung die Differentialgleichungen

$$\Phi_q = -\frac{1-M^2}{\varrho q}\Psi_\vartheta,\ \Phi_\vartheta = \frac{q}{\varrho}\Psi_q,\ M^2 = -\frac{q}{\varrho}\frac{d\varrho}{dq}. \tag{23}$$

Dabei sind sowohl die Dichte ϱ als auch die lokale Machzahl M Funktionen des Geschwindigkeitsbetrages q allein. Nun seien in der Hodographenebene neue Koordinaten s und t eingeführt:

$$s = s(q),\ t = -\vartheta, \tag{24}$$

wobei die Funktion $s(q)$ durch die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\frac{1-M^2}{\varrho q}\frac{dq}{ds} = \frac{q}{\varrho}\frac{ds}{dq} \tag{25}$$

definiert wird. Mit den Bedingungen (25) verwandelt die Transformation (24) das System (23) in ein System vom Typus (A)

$$\Phi_s = \omega(s)\Psi_t,\ \Psi_s = -\frac{1}{\omega(s)}\Phi_t;\ \omega(s) = \frac{\sqrt{1-M^2}}{\varrho} = \frac{q}{\varrho}\frac{ds}{dq},\ M<1, \tag{26}$$

dessen Gleichungen durch die Bäcklundtransformationen von § 3 in die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen verwandelt werden können. Dabei stehen für $\omega(s)$ die Funktionen (22) zur Verfügung. Ersetzen wir die unabhängige Veränderliche q durch $\varkappa = \lg q$, so verwandelt sich die dritte der Gleichungen (26) in

$$\omega(s) = \frac{1}{\varrho}\frac{ds}{d\varkappa} = \frac{\sqrt{1-M^2}}{\varrho} \text{ bzw. } \varrho = \frac{1}{\omega(s)}\frac{ds}{d\varkappa}. \tag{27}$$

Damit ergibt sich nach Elimination von ϱ und der lokalen Machzahl M aus (25), der dritten der Gleichungen (26) und (27)

$$M^2 = -q\omega(s)\left(\frac{ds}{d\varkappa}\right)^{-1}\frac{d}{d\varkappa}\left(\frac{1}{\omega(s)}\frac{ds}{d\varkappa}\right)\frac{d\varkappa}{dq}$$

$$= -\omega(s)\left(\frac{ds}{d\varkappa}\right)^{-1}\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\omega(s)}\right)\left(\frac{ds}{d\varkappa}\right)^2 - \omega(s)\left(\frac{ds}{d\varkappa}\right)^{-1}\frac{1}{\omega(s)}\frac{d^2s}{d\varkappa^2},$$

$$1-M^2 = 1 - \frac{1}{\omega(s)}\frac{d\omega}{ds}\frac{ds}{d\varkappa} + \left(\frac{ds}{d\varkappa}\right)^{-1}\frac{d^2s}{d\varkappa^2} = q^2\left(\frac{ds}{dq}\right)^2 = \left(\frac{d(\lg q)}{ds}\right)^{-2} = \left(\frac{ds}{d\varkappa}\right)^2$$

oder:

$$\frac{d^2s}{d\varkappa^2} = \left(\frac{ds}{d\varkappa}\right)^3 + \frac{1}{\omega(s)}\frac{d\omega}{ds}\left(\frac{ds}{d\varkappa}\right)^2 - \frac{ds}{d\varkappa}. \tag{28}$$

Durch (28) erscheint s als Funktion von $\varkappa = \lg q$ bestimmt und ebenso $\frac{ds}{d\varkappa}$ (der Koeffizient $\frac{1}{\omega(s)}\frac{d\omega}{ds}$ ist bekannt).

Jede Lösung $s(\lg q)$ der Differentialgleichung (28) *verwandelt die Gleichungen* (27) *in eine Dichte-Geschwindigkeitsrelation* $\varrho = \frac{1}{\omega(s(\lg q))}\frac{ds(\lg q)}{d(\lg q)}$, *welche mit Hilfe der Bernoullischen Druckgleichung auf eine Druckdichtebeziehung führt. Wegen $M<1$ ist diese Methode*

auf Strömungen des Unterschallgebietes beschränkt. Die Integration der Differentialgleichung (28) *kann auf die der Riccatischen Differentialgleichung*

$$\frac{d\tau}{ds} = \tau^2 - \tau \frac{d \lg \omega}{ds} - 1, \quad \left(\tau = \frac{d\varkappa}{ds}\right)$$

zurückgeführt werden.

Unter den Funktionen $\omega(s)$ ist in (22) als Spezialfall $\omega = \text{const}$ enthalten. Mit $\frac{1}{\omega} = c$ ergibt sich in diesem Falle aus (27) und (28)

$$\varrho = c \frac{ds}{d\varkappa}, \quad \frac{d\varrho}{d\varkappa} = \varrho \left(\frac{\varrho^2}{c^2} - 1\right), \quad \frac{d \lg q}{d\varrho} = \frac{c^2}{\varrho(\varrho^2 - c^2)}$$

und nach (elementarer) Integration mit Hilfe der Bernoullischen Druckgleichung eine lineare Druckvolumenrelation.

Die Notwendigkeit, die hier entwickelte Methode in ihrer Anwendung auf Strömungen des Unterschallgebietes zu beschränken, rührt von dem Auftreten der quadratischen Irrationalität $\sqrt{1 - M^2}$ in (26) her. Demgegenüber führt die Transformation (24) zu einer Erweiterung der Methode auf die Behandlung von Strömungen gemischten Charakters (des Unterschall- wie auch des Überschallgebietes), wenn man die Nebenbedingung (25) durch die Beziehung

$$\frac{ds}{dq} = \frac{\varrho}{q} \tag{29}$$

ersetzt. Denn mit (24) und (29) ergibt sich aus (23)

$$\Phi_s = \omega^*(s)\, \Psi_t, \quad \Phi_t = -\Psi_s, \quad \omega^*(s) = \frac{1 - M^2}{\varrho} = \frac{1 + \frac{q}{\varrho}\frac{d\varrho}{dq}}{\varrho^2}, \quad M \gtreqless 1. \tag{30}$$

Die in das System (30) eingehende lokale Machzahl M ist nicht mehr auf die Strömungen des Unterschallgebietes beschränkt. Dieser Umstand läßt erwarten, daß die Gleichungen (30) in solche (C) oder (C*) transformiert werden können, aus welchen durch Elimination einer der beiden unbekannten Funktionen Φ bzw. Ψ eine partielle Differentialgleichung von Tricomis Typus für die andere hervorgeht. Tatsächlich erhält man durch die Substitution bzw. Identifikation:

$$s = \tilde{s}, \; t = -\tilde{t}, \; \xi = \Psi, \; \eta = \Phi$$

aus (30) ein System vom Typus (C*). Auch die Differentialgleichung (28) hat ihr Analogon in der Gestalt

$$\frac{d^2 s}{d\varkappa^2} + \frac{ds}{d\varkappa} - \omega^*(s) \left(\frac{ds}{d\varkappa}\right)^3 = 0 \tag{31}$$

und kann durch die Substitution $\tau = \frac{d\varkappa}{ds}$ auf eine Riccatische Differentialgleichung

$$\frac{d\tau}{ds} = \tau^2 - \omega^*(s)$$

reduziert werden. Auch hier führt jede Lösung $s = s(\varkappa) = s(\lg q)$ der Differentialgleichung (31) mit Rücksicht auf (29), d. h $\frac{ds(\lg q)}{d(\lg q)} = \varrho$, auf eine Dichte-Geschwindigkeitsrelation $\varrho = \varrho(q)$ und mit Hilfe der Bernoullischen Druckgleichung weiter auf eine Druck-Dichterelation. Analoge Ergebnisse erhält man im Gebiet reiner Überschallströmungen bei Verwendung der Differentialgleichungen der Klasse (B).

Die hier von der entwickelten Transformationstheorie gelieferten zahlreichen Druck-Dichterelationen haben gegenüber den von der Thermodynamik gelieferten physikalisch wirklichen Druck-Dichterelationen den Charakter von Approximationen. Man hat daher in jedem einzelnen Falle die Güte dieser Approximation an den thermodynamisch vorliegenden Verhältnissen zu prüfen. Dabei kann man (z. B. im Unterschallgebiet) von den Potenzreihenentwicklungen in q^2 für ϱ, M und ω ausgehen und die Güte der Approximationen numerisch-tabellarisch verfolgen. Indessen liegen diese Betrachtungen der eigentlichen Transformationstheorie, über die hier berichtet werden sollte, zu fern [9]).

Was die Transformationstheorie selbst betrifft, so kann man versuchen, diese auch auf den Fall der Gasdynamik von dreidimensionalen Strömungen auszudehnen. Dann handelt es sich allgemein um Bäcklundsche Transformationen der Form

$$F^{(i)}(x_1, x_2, x_3, z, p_1, p_2, p_3; x_1', x_2', x_3', z', p_1', p_2', p_3') = 0, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5$$

für fünf unbekannte Funktionen x_1', x_2', x_3', z', z (wenn die unabhängigen Veränderlichen durch x_1, x_2, x_3 gegeben sind) bzw. fünf unbekannte Funktionen x_1, x_2, x_3, z, z' (wenn die unabhängigen Veränderlichen durch x_1', x_2', x_3' gegeben sind). Der Spezialfall

$$F^{(1)} = x_1' - x_1 = 0, \; F^{(2)} = x_2' - x_2 = 0, \; F^{(3)} = x_3' - x_3 = 0,$$
$$F^{(4)} = \alpha_{11} z_{x_1} + \alpha_{12} z_{x_2} + \alpha_{13} z_{x_3} - \alpha_{10} z + \beta_{11} z'_{x_1} + \beta_{12} z'_{x_2} + \beta_{13} z'_{y_3} - \beta_{10} z' = 0,$$
$$F^{(5)} = \alpha_{21} z_{x_1} + \alpha_{22} z_{x_2} + \alpha_{23} z_{x_3} - \alpha_{20} z + \beta_{21} z'_{x_1} + \beta_{22} z'_{x_2} + \beta_{23} z'_{x_3} - \beta_{20} z' = 0$$

wurde von D. Resch behandelt. Dabei wird ein bemerkenswertes Beispiel partieller Differentialgleichungen angegeben, welche durch Bäcklundtransformationen, aber nicht durch Transformationen ihrer unabhängigen oder abhängigen Veränderlichen einander zugeordnet werden können. Doch wird auf Probleme der dreidimensionalen Gasdynamik nicht eingegangen [10]). Dasselbe gilt von einer Untersuchung linearer Bäcklundtransformationen, die man W. T. Scott verdankt [11]).

---

[9]) Vgl. [2]), S. 35ff.

[10]) Vgl. *D. Resch*, Some Baecklund transformations of partial differential equations of second order, Syracuse University Thesis, Syracuse 1950. — Das hier angegebene System $F^{(i)} = 0$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$ entspricht dabei dem System (4) in § 1. Die Analogie zu System (5) in § 1 würde auf die Verwendung Bäcklundscher Transformationen vom Typus

$$G^{(i)}\left(x_1, x_2, x_3, z_1, z_2, z_3, p_1^{(1)}, \ldots, p_3^{(3)}; x_1', x_2', x_3', z_1', z_2', z_3', p_1'^{(1)}, \ldots, p_3'^{(3)}\right) = 0, \; i = 1, \ldots, 9$$

führen.

[11]) Vgl. *W. T. Scott*, Linear Baecklund transformations, OOR-Project No. 956, p. 79—92, technical report. Northwestern University, Evanston Illinois 1955.

Eingegangen 26. März 1957.

The Exact Values of the Bloch-Landau Constants $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{L}$.

By *Cengiz Uluçay* at Ankara.

1. Definition. *Let B_f denote the least upper bound of the radii of all schlicht circles contained in the Riemann surface generated by $w = f(z)$ which is analytic in the unit circle K and $|f'(0)| = 1$. Then $\mathfrak{B} = \min B_f$ is the Bloch constant.*

Definition. *If on the Riemann surface of $f(z)$, $|z| < 1$, $|f'(0)| = 1$, no schlicht circle of radius greater than $\mathfrak{B}$ exists, then $f(z)$ is called a Bloch function of the first kind.*

By omitting the word schlicht one gets the definitions of the Bloch-Landau constant $\mathfrak{L}$ and the Bloch function of the second kind respectively.

2. We are going to give the proof for $\mathfrak{L}$, since the proof for $\mathfrak{B}$ is exactly the same except for a minor modification.

Notations and Definitions.

T^* is the modular equilateral triangle inscribed in K. T_{ζ^*} is a modular triangle containing or passing through the centre of K.

$N^* = \{T_i^*\}$, $i = 1, 2, \ldots$, is the network of modular triangles covering K and obtained by repeated symmetries with respect to the sides of T^*.

f^* is the normalized analytic function generated by the conformal map of T^* onto a straight equilateral triangle in which the centers of the triangles correspond.

R^* is the Riemann surface of f^*.

$\mathfrak{L}^*$ is the radius of the maximal circles contained in R^*.

Thus to T^* is associated the number $\mathfrak{L}^*$.

Consider in general the functional

$$\mathfrak{F}(T_{\zeta^*}) = L^*. \tag{1}$$

It is defined as follows. We represent the totality of the triangles T_{ζ^*} on T^*, i. e., to every T_{ζ^*} corresponds in T^* a single point ζ^* and conversely. In particular to T^* corresponds $\zeta^* = 0$, the centre of K. We associate to T_{ζ^*} or, what is the same thing, to ζ^* the number L^* which is defined like $\mathfrak{L}^*$. In fact (1) can be written explicitely as

$$L^* = \frac{\mathfrak{L}^*}{|f^{*\prime}(\zeta^*)|\,(1 - |\zeta^*|^2)}$$

or

$$L^* = \mathfrak{L}^* \frac{d\sigma^*}{ds^*}, \quad ds^* = |dw^*|, \quad \zeta^* \in K,$$

which put in evidence the invariance property of L^* through conformal maps of K onto K and symmetries with respect to arcs of circle orthogonal to K.

Because of symmetry, to obtain the totality of the numbers L^* it suffices to let vary ζ^* in T^* only.

Our first fundamental result is then (cf. [1])

Theorem 1. *L^* is minimum and is equal to $\mathfrak{L}^*$ if and only if T_{ζ^*} is T^*, or $|f^{*\prime}(\zeta^*)|(1-|\zeta^*|^2)$ is maximum if and only if $\zeta^* = 0$.*

3. We state also our second fundamental result (cf. [2]).

Theorem 2. *The Bloch functions of the first and second kind are normalized analytic functions whose maps are boundaryless open Riemann surfaces with branch points of finite and infinite order.*

In the case of a Bloch function of the first kind branch points of any order would serve to fix the size of a Bloch circle, whereas in the case of a Bloch function of the second kind branch points of infinite order would serve to fix the size of a Landau circle.

The following theorem is also needed.

Theorem 3. *The Riemann surface R of a Bloch function of the second kind $f(z)$ does not possess any branch point of finite order.*

Proof. It is based on a variation of the branch points of finite order. In fact let

$$f(z) = z + \cdots$$

be a Bloch function of the second kind and a_0 a branch point of finite order. We let vary R by variing a_0 in some neighborhood N of a_0. We introduce the parameter α by means of a conformal map of N onto K, $|\alpha| < 1$, with a_0 going over into $\alpha = 0$.

We consider

$$L = \frac{\mathfrak{L}}{|f'_\zeta(\zeta, \alpha)|(1-|\zeta|^2)}.$$

By definition, $L = \mathfrak{L}$ for $\zeta = 0$, $\alpha = 0$, i. e. $|f'_\zeta(\zeta, \alpha)|(1-|\zeta|^2)$ is maximum for $\zeta = 0$, $\alpha = 0$. Here $f(\zeta, \alpha)$ is an analytic function of the independent variables $|\zeta| < 1$, $|\alpha| < 1$.

Hence by definition of $\mathfrak{L}$, $|f'_\zeta(\zeta, \alpha)_{\zeta=0}|$ must be maximum at the interior point $\alpha = 0$ which is impossible by the maximum principle.

This contradiction implies the theorem.

4. We are now in a position to conclude. However before to proceed, it is convenient to introduce at this moment new conventions, viz.

Letters which are not already defined will have the same meaning when these letters are affected with an asterisk.

The symbol $\sim$ will stand for a deformation.

$N = \{T_i\}$, $i = 1, 2, \ldots$, will denote a network of modular triangles T_i which just cover K.

The last two theorems imply at once that

$$R^* \sim R$$

and the existence of interior transformation in the sense of Stoïlow implies that f^* and f belong to a deformation class of normalized analytic functions $w = F(z, t)$, $0 \leqq t \leqq 1$, say, such that

$$F(z, 0) = f^*(z), \; F(z, 1) = f(z).$$

It follows that the correspondence between the set of numbers L^* and L is topological. We recall that L^* and L are defined at every point of the Riemann surface except at the branch points where it is assigned the value ∞.

On the other hand the deformation $R^* \sim R$ can be so chosen that it can be associated a deformation of K onto K in which $N^* \sim N$ and in particular $T_i^* \sim T_i$, and it follows from the first fundamental result that $\mathfrak{L}$ is uniquely determined in each T_i.

Finally the expression $|f'(\zeta)|(1-|\zeta|^2)$ which appears in the definition of L, being invariant with respect to symmetries, the foregoing uniqueness property yields at once the following concluding theorems.

Theorem 4. *$N^* = N$, save for an arbitrary conformal map of K onto K.*

Proof. The following properties, i. e.,

(i) $\mathfrak{L}$ is determined by $\zeta_i \in T_i$ say, with ζ variing in T_i associated to $\zeta = \zeta_i$.

(ii) L is invariant through symmetries with respect to arcs of circle orthogonal to K.

(iii) $\mathfrak{L}$ is uniquely determined within the totality of triangles containing $\zeta = 0$, viz. by the triangle T and the point $\zeta = 0$ associated to it,

imply that through a finite number of symmetries with respect to the sides of T_i, ζ_i goes over into $\zeta = 0$ while T_i goes over into T. Hence N is a network of modular triangles deducible from each other by means of symmetries with respect to the sides.

Theorem 5. *A Bloch function of the second kind is generated by the conformal map of a modular triangle onto a straight triangle whose repeated reflections in the sides just fill the whole plane.*

Proof. Let $w = f(z) = z + \cdots$ be a Bloch function of the second kind. It maps two adjacent triangles T_i and T_{i+1} onto two adjacent curvilinear triangles in the w-plane whose sides are analytic arcs. Denote by AB the common side of T_i and T_{i+1}. Let ab be the image of AB. Let $\zeta_0 \in T_i$ and $\zeta_1 \in T_{i+1}$ be two symmetric points with respect to AB in the neighborhood of AB. To these points will correspond in the w-plane two points ω_0 and ω_1 which are symmetric in the general sense with respect to ab. By means of a conformal map of K onto K we take ζ_0 into $\zeta = 0$, while T_i and T_{i+1} go over into two adjacent symmetric modular triangles and ζ_1 into a point $\tilde{\zeta}_1$ which is the symmetric of $\zeta = 0$ with respect to the common side. We have

$$w = f(\zeta) + f'(\zeta)(1-|\zeta|^2)z + \cdots \tag{2}$$

and

$$L = \mathfrak{L}\frac{d\sigma_0}{ds_0} = \mathfrak{L}\frac{d\sigma_1}{ds_1}. \tag{3}$$

Here $ds_0 = |d\omega_0|$, $ds_1 = |d\omega_1|$; $d\sigma_0, d\sigma_1$ are the hyperbolic differential elements at ζ_0, ζ_1 (or what is the same thing at $\zeta = 0, \tilde{\zeta}_1$) respectively and L is the radius of the maximal circles contained in the Riemann surface once (2) has been normalized.

But the points ζ_0 and ζ_1 being symmetric with respect to AB we have evidently at these points $d\sigma_0 = d\sigma_1$. Hence from (3) it follows that $ds_0 = ds_1$. As ω is arbitrary it follows that ab must be a straight line. Similar conclusion holds for the other sides of the curvilinear triangle. Hence the Bloch function is generated by the conformal map of a modular triangle onto a straight triangle. As $f(z)$ is analytic in K, the analytic continuation across the sides of the straight triangle by means of Schwarz' principle of reflections implies that the latter triangle must be one the three types of triangles considered in an earlier work (loc. cit. [1]).

Similar results hold of course for the case $\mathfrak{B}$. However in this case a Bloch function of the first kind must be replaced by an approximating function obtained by replacing all branch points of infinite order by branch points of order n where this order is taken as large as we please. We thus obtain a Riemann surface with infinite number of sheets such that on every sheet there ly n sheets. This Riemann surface is now compared with the Riemann surface generated by the conformal map of an equiangular equilateral circular triangle lying in and orthogonal to K, with interior angles equal to $\pi/3n$, onto a straight equilateral triangle. In this deformation each sheet is deformed into the corresponding sheet with branch points corresponding each to each. The concluding theorems are therefore the same for this approximating function and the ultimate result is obtained after a passage to the limit.

We have thus shown that Bloch functions of the second and first kind belong to classes called class $\mathfrak{L}$ and class $\mathfrak{B}$ respectively (loc. cit. [1]). There, it was found that

$$\mathfrak{L} = \cdot 543\ldots, \quad \mathfrak{B} = \cdot 4719\ldots,$$

i. e., Bloch function of each kind is unique and is obtained by mapping conformally the modular equilateral triangle or the $\pi/6$-Schwarz triangle onto a straight equilateral triangle according the case.

It should be observed that the use of the notion of fundamental region has been avoided throughout the proof. Should this notion had been used theorem 4 should read:

The fundamental region of a Bloch function of the second (first) kind is generated by a modular (Schwarz) triangle by means of repeated symmetries with respect to the sides.

Literature.

[1] *C. Uluçay*, On the Bloch-Landau Constants, Communications de la Faculté des Sciences de l'Université d'Ankara, Série A **7** (1955),, Fasc. 1; (see also MR **17**, No. 5, May 1956).

[2] *C. Uluçay*, Sur les Fonctions de Bloch de la première et de la seconde espèce, Communications de la Faculté des Sciences de l'Université d'Ankara, Série A, **6** (1954), Fasc. 1; (see also MR **16**, No. 10, Nov. 1955).

Eingegangen 13. April 1957.

Fortsetzung von Gruppenhomomorphismen.

Von *F. Loonstra* in 's-Gravenhage, Holland.

Einleitung.

In der vorliegenden Arbeit wird folgendes Problem untersucht: Es seien A', A, Q drei Gruppen mit homomorphen Abbildungen k, f, f' derart, daß $k(A) = A'$, $f(Q) = A$, $f'(Q) = A'$ und $f' = kf$ ist; außerdem seien die Gruppen B', B, R gegeben mit den homomorphen Abbildungen $h(B) = B'$, $d(R) = B$, $d'(R) = B'$ und $d' = hd$; schematisch:

$$\begin{tikzcd} A' & A \arrow[l, "k"'] \\ & Q \arrow[ul, "f'"] \arrow[u, "f"'] \end{tikzcd}, \qquad \begin{tikzcd} B' & B \arrow[l, "h"'] \\ & R \arrow[ul, "d'"] \arrow[u, "d"'] \end{tikzcd}.$$

Es ist möglich, Erweiterungen $G'(A'; B')$, $G(A; B)$, $S(Q; R)$ und außerdem drei homomorphe Abbildungen g, t, t' derart zu bestimmen, daß gilt:

1) $g(G) = G'$, $t(S) = G$, $t'(S) = G'$;
2) $t' = gt$;
3) g induziert k und h, t induziert f und d, t' induziert f' und d', also schematisch:

$$\begin{tikzcd} G' & G \arrow[l, "g"'] \\ & S \arrow[ul, "t'"] \arrow[u, "t"'] \end{tikzcd}.$$

Für den Fall, daß A', A, Q abelsche Gruppen sind, ist es möglich, sich eine Übersicht *aller* möglichen Lösungen $\begin{tikzcd} G' & G \arrow[l, "g"'] \\ & S \arrow[ul, "t'"] \arrow[u, "t"'] \end{tikzcd}$ zu verschaffen. Es wäre denkbar, anstatt der angegebenen Dreiecke das Schema in der Form $A' \overset{k}{\leftarrow} A \overset{f}{\leftarrow} Q$, $B' \overset{h}{\leftarrow} B \overset{d}{\leftarrow} R$; $f' = kf$, $d' = hd$ zu schreiben; man übersieht aber das ganze Problem dann nicht gut; überdies ist es nicht so, daß die Bestimmung der Gruppen G', G, S nach einem sich wiederholenden Verfahren von G aus G' und von S aus G erfolgt.

§ 1.

Es seien drei Erweiterungen $G(A; B)$, $G'(A'; B')$, $S(Q; R)$ gegeben[1]) und außerdem drei homomorphe Abbildungen g, t, t' mit den Eigenschaften:

α) g bildet G homomorph auf G' derart ab, daß g eine homomorphe Abbildung k von A auf A' induziert und also auch eine homomorphe Abbildung h von B auf B';

[1]) Unter einer Erweiterung $G(A; B)$ der Gruppe A durch die Gruppe B versteht man eine Gruppe G derart, daß A Normalteiler von G ist und G/A isomorph zu B ist. Zwei Erweiterungen G_1 und G_2 von A durch B werden äquivalent genannt, wenn es eine isomorphe Beziehung zwischen G_1 und G_2 gibt, die A und B elementweise in Ruhe läßt.

β) t bildet S auf G derart ab, daß t eine homomorphe Abbildung f von Q auf A induziert und also auch eine homomorphe Abbildung d von R auf B;

γ) t' bildet S auf G' derart ab, daß t' eine homomorphe Abbildung f' von Q auf A' induziert und also auch eine homomorphe Abbildung d' von R auf B';

δ) die Abbildungen g, t, t' sind so beschaffen, daß $t' = gt$ gilt[2]).

Es läßt sich sofort nachweisen, daß auch $f' = kf$ und $d' = hd$ gilt; für die Dreiecke (A', A, Q) und (B', B, R) gelten also Relationen analog wie für (G', G, S):

$$\begin{tikzcd} G'(A';B') & & G(A;B) \arrow[ll, "g"'] \\ & S(Q;R) \arrow[ul, "t'"] \arrow[ur, "t"'] & \end{tikzcd}, \quad \begin{tikzcd} A' & & A \arrow[ll, "k"'] \\ & Q \arrow[ul, "f'"] \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}, \quad \begin{tikzcd} B' & & B \arrow[ll, "h"'] \\ & R \arrow[ul, "d'"] \arrow[ur, "d"'] & \end{tikzcd}.$$

Die Elemente von A bezeichnen wir mit $\{e, a, b, \ldots\}$, die von B mit $\{\varepsilon, \alpha, \beta, \ldots\}$, die Elemente von A' und B' analog mit Strichen, die Elemente von Q mit $\{e, q, \ldots\}$, die Elemente von R mit $\{\varepsilon, \varrho, \sigma, \ldots\}$.

Man wählt in $G'(A'; B')$ ein Repräsentantensystem $\{g'_{\alpha'}\}$, d. h. in jeder Nebenklasse α' von A' in G' wählt man einen Vertreter $g'_{\alpha'}$, und dabei insbesondere $g'_{\varepsilon'} = e'$ (ε', e' sind die Identitäten von B' bzw. A'). Dann gibt es in $G(A; B)$ ein analoges Repräsentantensystem $\{g_\alpha\}$ derart, daß immer gilt

$$(1) \qquad g(g_\alpha) = g'_{\alpha'}, \text{ wenn } h(\alpha) = \alpha' \text{ ist,}$$

und außerdem ein Repräsentantensystem $\{s_\varrho\}$ in $S(Q; R)$ derart, daß immer gilt

$$(2) \qquad t(s_\varrho) = g_\alpha, \text{ wenn } d(\varrho) = \alpha \text{ ist.}$$

Man sieht dann leicht, daß auch immer gilt

$$(3) \qquad t'(s_\varrho) = g'_{\alpha'}, \text{ wenn } d'(\varrho) = \alpha' \text{ ist.}$$

Für die Repräsentantensysteme besteht demnach eine Beziehung

$$\begin{tikzcd} \{g'_{\alpha'}\} & & \{g_\alpha\} \arrow[ll, "g"'] \\ & \{s_\varrho\} \arrow[ul, "t'"] \arrow[ur, "t"'] & \end{tikzcd}, \text{ wenn } \begin{tikzcd} \alpha' & & \alpha \arrow[ll, "h"'] \\ & \varrho \arrow[ul, "d'"] \arrow[ur, "d"'] & \end{tikzcd}.$$

Jedes Repräsentantensystem zieht ein Faktorensystem nach sich:

$$\begin{aligned} g'_{\alpha'} \cdot g'_{\beta'} &= g'_{\alpha'\beta'} \cdot m'(\alpha'; \beta'), & m'(\alpha'; \beta') &\in A' \\ g_\alpha \cdot g_\beta &= g_{\alpha\beta} \cdot m(\alpha; \beta), & m(\alpha; \beta) &\in A, \\ s_\varrho \cdot s_\sigma &= s_{\varrho\sigma} \cdot \mu(\varrho; \sigma), & \mu(\varrho; \sigma) &\in Q. \end{aligned}$$

Für diese Faktoren bestehen die Assoziativrelationen

$$m(\alpha\beta; \gamma) \cdot m^\gamma(\alpha; \beta) = m(\alpha; \beta\gamma) \cdot m(\beta; \gamma),$$

wo

$$m^\gamma(\alpha; \beta) = g_\gamma^{-1} m(\alpha; \beta)\, g_\gamma$$

ist, und analoge Relationen für die anderen Faktorensysteme. Aus (1), (2) und (3) ergibt sich nun eine Relation zwischen diesen Faktorensystemen; es ist

$$g(g_\alpha g_\beta) = g'_{\alpha'} g'_{\beta'},$$

also

$$(4) \qquad k(m(\alpha; \beta)) = m'(\alpha'; \beta'), \text{ wenn } h(\alpha) = \alpha', h(\beta) = \beta';$$

[2]) Die Abbildungen werden von rechts nach links ausgeführt.

und analog

(5) $$f(\mu(\varrho;\sigma)) = m(\alpha;\beta), \text{ wenn } d(\varrho) = \alpha,\ d(\sigma) = \beta;$$

(6) $$f'(\mu(\varrho;\sigma)) = m'(\alpha';\beta'), \text{ wenn } d'(\varrho) = \alpha',\ d'(\sigma) = \beta'.$$

Wir deuten mit $K_g, K_k, \ldots$ usw. die Kerne der homomorphen Abbildungen $g, k, \ldots$ usw. an; dann läßt sich einfach nachweisen, daß K_g eine in $G(A;B)$ gelegene Erweiterung $K_g(K_k;K_h)$ von K_k durch K_h darstellt, und ebenso ist $K_t(K_f;K_d)$ eine Erweiterung von K_f durch K_d und $K_{t'}(K_{f'};K_{d'})$ eine Erweiterung von $K_{f'}$ durch $K_{d'}$. Es gilt $K_t < K_{t'}$, $K_f < K_{f'}$, $K_d < K_{d'}$, denn aus $s \in K_t$ folgt $t(s) = e$, also $gt(s) = t'(s) = e'$, d. h. $s \in K_{t'}$, usw.

Es ist K_t Normalteiler in $K_{t'}$, und ebenso K_f Normalteiler in $K_{f'}$ und K_d Normalteiler in $K_{d'}$. Ist nämlich $k_t \in K_t$, also $t(k_t) = e$, so ist auch $t(k_{t'}^{-1} k_t k_{t'}) = e$, also K_t Normalteiler in $K_{t'}$, usw.

Zwischen $K_{t'}$, K_t und K_g besteht die Beziehung $K_{t'}/K_t \cong K_g$.

Beweis: Man kann $K_{t'}$ homomorph auf K_g abbilden, wenn man dem Element $k_{t'}$ das t-Bild $t(k_{t'}) = k_g \in K_g$ zuordnet. Es muß jedenfalls $t(k_{t'}) \in K_g$ sein; denn es gilt $gt(k_{t'}) = t'(k_{t'}) = e'$, also $t(k_{t'}) \in K_g$. Diese Abbildung ist eine homomorphe Abbildung von $K_{t'}$ auf K_g; jedes Element k_g hat nämlich ein Urbild, das durch t' auf $e' \in G'$ abgebildet wird, also muß das Urbild in $K_{t'}$ liegen. Der Kern dieser Abbildung ist K_t, also $K_{t'}/K_t \cong K_g$. Auf dieselbe Weise zeigt man

$$K_{f'}/K_f \cong K_k \text{ und } K_{d'}/K_d \cong K_h.$$

Die Repräsentanten $\{g'_{\alpha'}\}$, $\{g_\alpha\}$ und $\{s_\varrho\}$ induzieren in A' (bzw. A und Q) Automorphismen $a' \to g_{\alpha'}'^{-1} a' g'_{\alpha'} = \varphi'_{\alpha'}(a')$, $a \to g_\alpha^{-1} a g_\alpha = \varphi_\alpha(a)$, $q \to s_\varrho^{-1} q s_\varrho = \psi_\varrho(q)$. Die Abbildung g bildet a auf $k(a) = a'$, $\varphi_\alpha(a)$ auf $g(g_\alpha^{-1} a g_\alpha) = g_{\alpha'}'^{-1} a' g'_{\alpha'} = \varphi'_{\alpha'}(a')$ ab. Ist $k(a) = k(b)$, so ist auch $k(\varphi_\alpha(a)) = k(\varphi_\alpha(b))$; ist $h(\alpha) = h(\beta)$, so ist auch $k(\varphi_\alpha(a)) = k(\varphi_\beta(a))$. Der Homomorphismus g bildet also das Automorphismensystem $\{\varphi_\alpha\}$ ab auf das System $\{\varphi'_{\alpha'}\}$:

(7) $$g(\varphi_\alpha) = \varphi'_{\alpha'}, \text{ wenn } h(\alpha) = \alpha'.$$

Man findet also durch die Wahl der Vertreter $\{g_\alpha\}$ ein System $\{m(\alpha;\beta);\ \varphi_\alpha\}$ von Faktoren $m(\alpha;\beta)$ aus A und Automorphismen φ_α von A, so daß die folgenden Eigenschaften gelten:

$$m(\alpha\beta;\gamma)\cdot\varphi_\gamma(m(\alpha;\beta)) = m(\alpha;\beta\gamma)\cdot m(\beta;\gamma),\quad \varphi_\alpha\varphi_\beta = \langle m(\alpha;\beta)\rangle\,\varphi_{\alpha\beta},$$

wo $\langle m(\alpha;\beta)\rangle$ den durch $m(\alpha;\beta)$ bestimmten inneren Automorphismus von A darstellt. Ein solches System $\{m(\alpha;\beta);\ \varphi_\alpha\}$ nennen wir ein für die Gruppen A und B zulässiges System.

Auf dieselbe Weise sieht man

(8) $$t(\psi_\varrho) = \varphi_\alpha, \text{ wenn } d(\varrho) = \alpha,$$

und

(9) $$t'(\psi_\varrho) = \varphi'_{\alpha'}, \text{ wenn } d'(\varrho) = \alpha'.$$

Man hat also für die von den Repräsentanten induzierten Automorphismen in A', A und Q das folgende Schema

$$\begin{tikzcd} \{\varphi'_{\alpha'}\} & \{\varphi_\alpha\} \arrow[l, "g"'] \\ & \{\psi_\varrho\} \arrow[ul, "t'"] \arrow[u, "t"'] \end{tikzcd}, \quad \text{wenn} \quad \begin{tikzcd} \alpha' & \alpha \arrow[l, "h"'] \\ & \varrho \arrow[ul, "d'"] \arrow[u, "d"'] \end{tikzcd}.$$

Wir geben die Eigenschaften der von den Repräsentanten induzierten Automorphismen an:

1) Die Automorphismen $\{\varphi_\alpha\}$ von A induzieren Automorphismen von K_k. Ist nämlich $k(a) = e'$, so ist auch $k(\varphi_\alpha(a)) = g(g_\alpha^{-1} a g_\alpha) = e$, also $\varphi_\alpha(a) \in K_k$. Ist $a \in K_k$, so ist $a = \varphi_\alpha(b)$ für $b = g_\alpha a g_\alpha^{-1} \in K_k$.

2) Für $\alpha \in K_h$ wird der Automorphismus $\varphi_\alpha\colon a \to g_\alpha^{-1} a g_\alpha$ durch die Abbildung k in die identische Abbildung $a' \to a'$ übergeführt. Für $\alpha \in K_h$ ist also $k(a) = k(\varphi_\alpha(a))$; für $\alpha \in K_h$ wird also jede Nebenklasse von K_k in A durch φ_α auf sich abgebildet, und die zu ihr gehörige Abbildung $\varphi'_{\alpha'}$ in A' läßt A' elementweise invariant. Es folgt: Ist $k(a) = k(b) = a'$, $h(\alpha) = h(\beta) = \alpha'$, so ist $k(\varphi_\alpha(a)) = k(\varphi_\beta(b))$.

3) Auf dieselbe Weise gelten für die Automorphismen $\{\psi_\varrho\}$ folgende Eigenschaften: Die $\{\psi_\varrho\}$ induzieren Automorphismen von K_f. Für $\varrho \in K_d$ wird jede Nebenklasse von K_f in Q durch ψ_ϱ auf sich abgebildet, und die zu ihr gehörige Abbildung φ_α in A läßt A elementweise invariant. Es folgt: Ist $f(q_1) = f(q_2) = a$, $d(\varrho_1) = d(\varrho_2) = \alpha$, so ist $f(\psi_{\varrho_1}(q_1)) = f(\psi_{\varrho_2}(q_2))$.

4) Die $\{\psi_\varrho\}$ induzieren auch Automorphismen von $K_{f'}$. Für $\varrho \in K_{d'}$ wird jede Nebenklasse von $K_{f'}$ in Q durch ψ_ϱ auf sich abgebildet, die zu ihr gehörige Abbildung $\varphi'_{\alpha'}$ in A' läßt A' elementweise invariant, und es ist für $f'(q_1) = f'(q_2) = a'$ und $d'(\varrho_1) = d'(\varrho_2) = \alpha'$ immer $f'(\psi_{\varrho_1}(q_1)) = f'(\psi_{\varrho_2}(q_2))$.

Bezeichnen wir die Elemente von G' mit $(\alpha'; a')$, die Elemente von G mit $(\alpha; a)$, die Elemente von S mit $(\varrho; q)$, so folgt aus $g(\alpha; e) = (\alpha'; e')$ und $g(\varepsilon; a) = (e'; a')$, daß $g(\alpha; a) = (\alpha'; a')$ für $h(\alpha) = \alpha'$, $k(a) = a'$ ist, und ebenso $t(\varrho; q) = (\alpha; a)$ für $d(\varrho) = \alpha$, $f(q) = a$, und $t'(\varrho; q) = (\alpha'; a')$ für $d'(\varrho) = \alpha'$, $f'(q) = a'$.

§ 2.

Es seien nun umgekehrt A', A, B', B, Q, R gegeben und außerdem homomorphe Abbildungen k, h, f, d, f', d' derart, daß $k(A) = A'$, $h(B) = B'$, $f(Q) = A$, $d(R) = B$, $f'(Q) = A'$, $d'(R) = B'$ und außerdem $f' = kf$, $d' = hd$ ist; man hat also folgendes Schema:

$$\begin{tikzcd} A' & A \arrow[l, "k"'] \\ & Q \arrow[ul, "f'"] \arrow[u, "f"'] \end{tikzcd}, \qquad \begin{tikzcd} B' & B \arrow[l, "h"'] \\ & R \arrow[ul, "d'"] \arrow[u, "d"'] \end{tikzcd}.$$

Es ist möglich, drei Erweiterungen $G'(A'; B')$, $G(A; B)$, $S(Q; R)$ und außerdem drei homomorphe Abbildungen g, t, t' derart zu bestimmen, daß gilt:

1°) $g(G(A; B)) = G'(A'; B')$, $t(S(Q; R)) = G(A; B)$, $t'(S(Q; R)) = G'(A'; B')$;

2°) $t' = gt$;

3°) g induziert die Abbildungen k und h, t induziert f und d, t' induziert f' und d'.

Man wählt dazu für G' das direkte Produkt $B' \times A'$, für G das direkte Produkt $B \times A$, für S das direkte Produkt $R \times Q$ und man definiert

$$g(\alpha; a) = (h(\alpha); k(a)) = (\alpha'; a'), \; t(\varrho; q) = (d(\varrho); f(q)) = (\alpha; a),$$
$$t'(\varrho; q) = (d'(\varrho); f'(q)) = (\alpha'; a').$$

Wir wollen uns, falls A', A, Q abelsche Gruppen sind, eine Übersicht aller möglichen Lösungen

$$\begin{tikzcd} G' & G \arrow[l, "g"'] \\ & S \arrow[ul, "t'"] \arrow[u, "t"'] \end{tikzcd}$$

verschaffen.

Setzen wir voraus, daß für A' ein zulässiges System $\{m'(\alpha'; \beta'); \varphi'_{\alpha'}\}$, für A ein zulässiges System $\{m(\alpha; \beta); \varphi_\alpha\}$ und für Q ein zulässiges System $\{\mu(\varrho; \sigma); \psi_\varrho\}$ gegeben

sei und $G'(A'; B')$, $G(A; B)$, $S(Q; R)$ die zugehörigen Erweiterungen seien. Wenn nun diese Systeme derartig gegeben sind, daß

$$\begin{aligned}
k(m(\alpha;\beta)) &= m'(\alpha';\beta'), && \text{wenn } h(\alpha) = \alpha',\ h(\beta) = \beta',\\
f(\mu(\varrho;\sigma)) &= m(\alpha;\beta), && \text{wenn } d(\varrho) = \alpha,\ d(\sigma) = \beta,\\
f'(\mu(\varrho;\sigma)) &= m'(\alpha';\beta'), && \text{wenn } d'(\varrho) = \alpha',\ d'(\sigma) = \beta',\\
k(\varphi_\alpha) &= \varphi'_{\alpha'}, && \text{wenn } h(\alpha) = \alpha',\\
f(\psi_\varrho) &= \varphi_\alpha, && \text{wenn } d(\varrho) = \alpha,\\
f'(\psi_\varrho) &= \varphi'_{\alpha'}, && \text{wenn } d'(\varrho) = \alpha',
\end{aligned}$$

so gibt es eine Lösung unseres Problems; man bezeichne die Elemente von $G'(A'; B')$ mit $(\alpha'; a')$ und $(\alpha'; a')\,(\beta'; b') = (\alpha'\beta'; m'(\alpha'; \beta')\,(\varphi'_{\beta'}(a'))\,b')$, die Elemente von $G(A; B)$ mit $(\alpha; a)$ und $(\alpha; a)\,(\beta; b) = (\alpha\beta; m(\alpha; \beta)\,(\varphi_\beta(a))\,b)$, die Elemente von $S(Q; R)$ mit $(\varrho; q)$ und $(\varrho; q)\,(\varrho_1; q_1) = (\varrho\varrho_1; \mu(\varrho; \varrho_1)\,(\psi_{\varrho_1}(q))\,q_1)$ und definiere

$$\begin{aligned}
g(\alpha; a) &= (h(\alpha); k(a)) = (\alpha'; a'),\\
t(\varrho; q) &= (d(\varrho); f(q)) = (\alpha; a),\\
t'(\varrho; q) &= (d'(\varrho); f'(q)) = (\alpha'; a').
\end{aligned}$$

Solche zulässigen Systeme

$$\{m'(\alpha'; \beta');\ \varphi'_{\alpha'}\},\ \{m(\alpha; \beta);\ \varphi_\alpha\},\ \{\mu(\varrho; \sigma);\ \psi_\varrho\}$$

nennen wir verträglich. Man bekommt tatsächlich *alle* möglichen Lösungen des genannten Problems, wenn man die soeben formulierten verträglichen zulässigen Systeme aufsucht und für die homomorphen Abbildungen g, t, t' die oben genannten Abbildungen wählt. Hat man nämlich eine Lösung unseres Problems, so findet man ja durch passende Wahl der Repräsentanten $\{g'_{\alpha'}\}$, $\{g_\alpha\}$, $\{s_\varrho\}$ drei Systeme $\{m'(\alpha'; \beta');\ \varphi'_{\alpha'}\}$, $\{m(\alpha; \beta);\ \varphi_\alpha\}$, $\{\mu(\varrho; \sigma);\ \psi_\varrho)$, wo

$$\begin{aligned}
k\{m(\alpha; \beta);\ \varphi_\varrho\} &= \{m'(\alpha'; \beta');\ \varphi'_{\alpha'}\},\\
f\{\mu(\varrho; \sigma);\ \psi_\varrho\} &= \{m(\alpha; \beta);\ \varphi_\alpha\},\\
f'\{\mu(\varrho; \sigma);\ \psi_\alpha\} &= \{m'(\alpha'; \beta');\ \varphi'_{\alpha'}\} \text{ ist.}
\end{aligned}$$

Wir verabreden nun noch, welche Lösungen unseres Problems identifiziert werden sollen. Sind

$$\begin{tikzcd}
\{m'(\alpha';\beta');\ \varphi'_{\alpha'}\} & \{m(\alpha;\beta);\ \varphi_\alpha\} \arrow[l, "k"'] \\
\{\mu(\varrho;\sigma);\ \psi_\varrho\} \arrow[ul, "f'"] \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}
\quad \text{und} \quad
\begin{tikzcd}
\{\overline{m}'(\alpha';\beta');\ \overline{\varphi}'_{\alpha'}\} & \{\overline{m}(\alpha;\beta);\ \overline{\varphi}_\alpha\} \arrow[l, "k"'] \\
\{\overline{\mu}(\varrho;\sigma);\ \overline{\psi}_\varrho\} \arrow[ul, "f'"] \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

zwei Systeme von verträglichen zulässigen Systemen, so identifizieren wir die mit diesen Systemen übereinstimmenden Lösungen, wenn es drei Systeme $\{c'(\alpha')\} \in A'$, $\{c(\alpha)\} \in A$, $\{c''(\varrho)\} \in Q$ derart gibt, daß immer gilt

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned}
c'(\alpha') &= k(c(\alpha)) = k(c(\beta)), && \text{wenn } h(\alpha) = h(\beta) = \alpha',\\
c(\alpha) &= f(c''(\varrho)) = f(c''(\sigma)), && \text{wenn } d(\varrho) = d(\sigma) = \alpha,\\
c'(\alpha') &= f'(c''(\varrho)) = f'(c''(\sigma)), && \text{wenn } d'(\varrho) = d'(\sigma) = \alpha',
\end{aligned}\right.$$

und außerdem

$$\begin{aligned}
\overline{m}'(\alpha'; \beta') &= c'^{-1}(\alpha'\beta')\ m'(\alpha'; \beta')\ \varphi'_{\beta'}(c'(\alpha'))\ c'(\beta'),\\
\overline{m}(\alpha; \beta) &= c^{-1}(\alpha\beta)\ \ m(\alpha; \beta)\ \varphi_\beta(c(\alpha))\,c(\beta),\\
\overline{\mu}(\varrho; \sigma) &= c''^{-1}(\varrho\sigma)\,\mu(\varrho; \sigma)\ \ \psi_\sigma(c''(\varrho))\,c''(\sigma),\\
\overline{\varphi}'_{\alpha'} = \langle c'(\alpha')\rangle\ \varphi'_{\alpha'},\quad \overline{\varphi}_\alpha &= \langle c(\alpha)\rangle\ \varphi_\alpha,\quad \overline{\psi}_\varrho = \langle c''(\varrho)\rangle\ \psi_\varrho.
\end{aligned}$$

Man sieht leicht, daß es für die Existenz von Systemen $\{c'(\alpha')\}$, $\{c(\alpha)\}$, $\{c''(\varrho)\}$ mit den Eigenschaften (1) notwendig und hinreichend ist, daß man ein System von Größen $\{c''(\varrho)\}$ in Q findet, mit den Eigenschaften

$$(2) \qquad \begin{cases} f'(c''(\varrho)) = f'(c''(\varrho')), \text{ wenn } d'(\varrho) = d'(\varrho'), \\ f(c''(\varrho)) = f(c''(\varrho')), \text{ wenn } d(\varrho) = d(\varrho'). \end{cases}$$

§ 3.

Wir setzen nun voraus, daß die Gruppen A', B', A, B, Q, R gegeben sind mit den homomorphen Abbildungen

$$k(A) = A',\ f(Q) = A,\ f'(Q) = A',\quad f' = kf,$$
$$h(B) = B',\ d(R) = B,\ d'(R) = B',\quad d' = hd$$

und außerdem ein System von Automorphismen $\{\psi_\varrho\}$ von Q mit den Bedingungen:

1) ψ_ϱ induziert (für jedes $\varrho \in R$) einen Automorphismus von K_f und von $K_{f'}$;
2) $f(\psi_\varrho(q)) = f(\psi_\sigma(q))$, wenn $d(\varrho) = d(\sigma)$,
   $f'(\psi_\varrho(q)) = f'(\psi_\sigma(q))$, wenn $d'(\varrho) = d'(\sigma)$.

Erstens induzieren die Automorphismen $\{\psi_\varrho\}$ ein Automorphismensystem $\{\varphi'_{\alpha'}\}$ von A', wenn man die Abbildung $\varphi'_{\alpha'}$ für $f'(q) = a'$ definiert durch

$$\varphi'_{\alpha'}(a') = f'(\psi_\varrho(q)), \text{ wenn } d'(\varrho) = \alpha'.$$

Auf dieselbe Weise induzieren die $\{\psi_\varrho\}$ auch Automorphismen $\{\varphi_\alpha\}$ von A, wenn man die Abbildung φ_α definiert durch

$$f(q) = a,\ \varphi_\alpha(a) = f(\psi_\varrho(q)), \text{ wenn } d(\varrho) = \alpha.$$

Aber wenn man bedenkt, daß $f' = kf$ ist, so kann man auch die Abbildung

$$a' \to \varphi'_{\alpha'}(a') = f'(\psi_\varrho(q))$$

bekommen, wenn man die Abbildung $a \to f(\psi_\varrho(q))$ wieder mit Hilfe von k projiziert: Es ist nämlich

$$k(\varphi_\alpha(a)) = kf(\psi_\varrho(q)) = f'(\psi_\varrho(q)) = \varphi'_{\alpha'}(a'),$$

wenn

$$f'(q) = kf(q) = k(a) = a' \text{ und } d'(\varrho) = hd(\varrho) = h(\alpha) = \alpha' \text{ ist.}$$

Man überzeugt sich nun leicht, daß auch die $\{\varphi_\alpha\}$-Abbildungen Automorphismen von K_k induzieren. Wenn nämlich $k(a) = e'$ ist, dann beweisen wir $k(\varphi_\alpha(a)) = e'$: Ist $k(a) = e'$ und $f(q) = a$, so ist $kf(q) = e'$, also $f'(q) = e'$ und $q \in K_{f'}$. Es ist $K_{f'}$ die einzige Untergruppe mit der Eigenschaft, daß für ihre Elemente q gilt $kf(q) = e'$. Wird ein Element $a \in A$ von k abgebildet auf e', so gehört es K_k an, und sein Urbild gehört zu $K_{f'}$. Die Elemente von $K_{f'}$ werden also von f auf K_k abgebildet, und dabei geht $K_f < K_{f'}$ in die Einheit e von K_k über. Wenn also $k(a) = e'$ ist, so ist auch $k(\varphi_\alpha(a)) = e'$ und es gehört $\varphi_\alpha(a)$ zu K_k. Ist $a \in K_k$, so ist z. B. $f(q) = a$, $\psi_\varrho^{-1}(q) = q_1$, $f(q_1) = b$, und es wird $b = \varphi_\alpha(a)$. Die von ψ_ϱ induzierte Abbildung φ_α ist also eine Abbildung, welche einen Automorphismus von K_k induziert.

Weiter ergibt sich $k(\varphi_\alpha(a)) = k(\varphi_\beta(a))$, wenn $h(\alpha) = h(\beta)$ ist. Es sei nämlich $d(\varrho) = \alpha$, $d(\sigma) = \beta$, dann ist $d'(\varrho) = d'(\sigma) = \alpha'$, und wegen der Eigenschaften von f' ist $f'(\psi_\varrho(q)) = f'(\psi_\sigma(q))$. Aber dann ist auch $kf(\psi_\varrho(q)) = kf(\psi_\sigma(q))$, d. h.

$$k(\varphi_\alpha(a)) = k(\varphi_\beta(a)) \text{ für } h(\alpha) = h(\beta).$$

Die Abbildungen $\{\varphi'_{\alpha'}\}$ und $\{\varphi_\alpha\}$ sind also eindeutig bestimmt, wenn man ein System von Automorphismen $\{\psi_\varrho\}$ (für jedes $\varrho \in R$ einen Automorphismus von Q) hat mit den Eigenschaften:

1) ψ_ϱ induziert (für jedes $\varrho \in R$) einen Automorphismus von K_f und einen von $K_{f'}$;

2) $f(\psi_\varrho(q)) = f(\psi_\sigma(q))$, wenn $d(\varrho) = d(\sigma)$,
$f'(\psi_\varrho(q)) = f'(\psi_\sigma(q))$, wenn $d'(\varrho) = d'(\sigma)$.

Es genügt also, für die Automorphismensysteme $\{\varphi'_{\alpha'}\}$, $\{\varphi_\alpha\}$, $\{\psi_\varrho\}$ nur das System $\{\psi_\varrho\}$ zu fordern mit den Eigenschaften 1) und 2). Wenn dann außerdem ein System $\mu(\varrho;\sigma) \in Q$ gegeben ist derart, daß gilt

$$f(\mu(\varrho;\sigma)) = f(\mu(\varrho';\sigma')), \text{ wenn } d(\varrho) = d(\varrho'),\ d(\sigma) = d(\sigma'),$$
$$f'(\mu(\varrho;\sigma)) = f'(\mu(\varrho';\sigma')), \text{ wenn } d'(\varrho) = d'(\varrho'),\ d'(\sigma) = d'(\sigma'),$$

so kann man das System $\{m(\alpha,\beta)\}$ definieren durch

$$f(\mu(\varrho;\sigma)) = m(\alpha;\beta), \text{ wenn } d(\varrho) = \alpha,\ d(\sigma) = \beta,$$

und analog

$$f'(\mu(\varrho;\sigma)) = m'(\alpha';\beta'), \text{ wenn } d'(\varrho) = \alpha',\ d'(\sigma) = \beta'.$$

Es ist nun auch $k(m(\alpha;\beta)) = k(m(\alpha_1;\beta_1))$, wenn $h(\alpha) = h(\alpha_1) = \alpha'$, $h(\beta) = h(\beta_1) = \beta'$ ist. Es seien nämlich $\varrho, \varrho_1, \sigma, \sigma_1$ derart, daß

$$d(\varrho) = \alpha,\ d(\sigma) = \beta,\ d(\varrho_1) = \alpha_1,\ d(\sigma_1) = \beta_1.$$

Aus $hd(\varrho) = hd(\varrho_1) = \alpha'$, $hd(\sigma) = hd(\sigma_1) = \beta'$ folgt $d'(\varrho) = d'(\varrho_1) = \alpha'$ und $d'(\sigma) = d'(\sigma_1) = \beta'$, also $f'(\mu(\varrho;\sigma)) = f'(\mu(\varrho_1;\sigma_1)) = m'(\alpha';\beta')$; also ist auch

$$k(m(\alpha;\beta)) = k(m(\alpha_1;\beta_1)), \text{ wenn } h(\alpha) = h(\alpha_1),\ h(\beta) = h(\beta_1).$$

Auf diese Weise bekommt man also tatsächlich alle verträglichen zulässigen Systeme; mit Hilfe der Faktoren $\{\mu(\varrho;\sigma)\}$, $\{m(\alpha;\beta)\}$, $\{m'(\alpha';\beta')\}$ und mit den Automorphismensystemen $\{\psi_\varrho\}$, $\{\varphi_\alpha\}$, $\{\varphi'_{\alpha'}\}$ ist es dann möglich, Erweiterungen $S(Q;R)$, $G(A;B)$, $G'(A';B')$ zu bestimmen: Elemente sind die Paare $(\varrho;q)$ bzw. $(\alpha;a)$ bzw. $(\alpha';a')$ und es gelten die Regeln

$$(\varrho;q)(\varrho_1;q_1) = (\varrho\varrho_1;\mu(\varrho;\varrho_1)(\psi_{\varrho_1}(q))q_1),$$
$$(\alpha;a)(\alpha_1;a_1) = (\alpha\alpha_1;m(\alpha;\alpha_1)(\varphi_{\alpha_1}(a))a_1),$$
$$(\alpha';a')(\alpha'_1;a'_1) = (\alpha'\alpha'_1;m'(\alpha',\alpha'_1)(\varphi'_{\alpha'_1}(a'))a'_1).$$

Wir setzen nun voraus, daß A', A und Q abelsche Gruppen sind.

Welche besonderen Bedingungen muß nun eine homomorphe Abbildung Θ von R in die Automorphismengruppe $\boldsymbol{Q}$ von Q erfüllen, damit man in Q ein System $\{\psi_\varrho\}$ von Automorphismen bekommt mit den Eigenschaften:

$$\text{(A)}\begin{cases} 1^\circ \text{ jedes } \psi_\varrho \text{ induziert (für jedes } \varrho \in R) \text{ je einen Automorphismus der Normalteiler } K_f \text{ und } K_{f'}; \\ 2^\circ\ f(\psi_\varrho(q)) = f(\psi_\sigma(q)), \text{ wenn } d(\varrho) = d(\sigma), \\ \quad f'(\psi_\varrho(q)) = f'(\psi_\sigma(q)), \text{ wenn } d'(\varrho) = d'(\sigma)? \end{cases}$$

Die Automorphismen von Q, die K_f und $K_{f'}$ auf sich abbilden, bilden eine Untergruppe $\boldsymbol{Q}_{f',f}$ von $\boldsymbol{Q}$. Außerdem muß man noch fordern, daß die Abbildungen ψ_ϱ mit $\varrho \in K_{d'}$ jede Nebenklasse von $K_{f'}$ in Q in sich überführen und daß ebenso die Abbildungen ψ_ϱ mit $\varrho \in K_d$ jede Nebenklasse von K_f in Q in sich überführen. Daraus ergibt sich, daß die

Abbildungen ψ_ϱ mit $\varrho \in K_{d'}$ in einem Normalteiler $\mathbf{Q}_{f',f,d'}$ von $\mathbf{Q}_{f',f}$ und die Abbildungen ψ_ϱ mit $\varrho \in K_d$ in einem Normalteiler $\mathbf{Q}_{f',f,d',d}$ von $\mathbf{Q}_{f',f,d'}$ liegen müssen. Solche Abbildungen gibt es immer, wenn man bedenkt, daß die identische Abbildung (d. h. jedes Element $\varrho \in R$ wird abgebildet auf $\psi_\varrho =$ identische Transformation von Q) den Forderungen genügt.

§ 4.

Wir wählen darum eine homomorphe Abbildung Θ von R in $\mathbf{Q}_{f',f}$ derart, daß das Bild der Normalteiler $K_{d'}$ und K_d in $\mathbf{Q}_{f',f,d'}$ bzw. $\mathbf{Q}_{f',f,d',d}$ liegt. Damit haben wir dann drei Systeme $\{\varphi'_{\alpha'}\}$, $\{\varphi_\alpha\}$, $\{\psi_\varrho\}$ von Automorphismen von A', A, Q, so daß gilt

$$\begin{tikzcd} \{\varphi'_{\alpha'}\} & & \{\varphi_\alpha\} \arrow[ll, "k"'] \\ & \{\psi_\varrho\} \arrow[ul, "f'"] \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd} \quad \text{immer, wenn} \quad \begin{tikzcd} \{\alpha'\} & & \{\alpha\} \arrow[ll, "h"'] \\ & \{\varrho\} \arrow[ul, "d'"] \arrow[ur, "d"'] & \end{tikzcd} .$$

Im Zusammenhang mit dem Folgenden schreiben wir die Komposition von A, A' und Q additiv. Jedes $\varrho \in R$ induziert einen Automorphismus $q \to q\varrho$ von Q derart, daß gilt

$$(q_1 + q_2)\,\varrho = q_1\varrho + q_2\varrho$$
$$q(\varrho\sigma) = (q\varrho)\,\sigma;\ q\varepsilon = q.$$

Das letzte Problem betrifft nun die Bestimmung eines zulässigen Faktorensystems $\{\mu(\varrho;\sigma)\}$, das den Bedingungen

$$\text{(B)}\quad \mu(\varrho\sigma;\tau) + (\mu(\varrho;\sigma)\,\tau) = \mu(\varrho;\sigma\tau) + \mu(\sigma;\tau),\ \mu(\varrho;\varepsilon) = \mu(\varepsilon;\varrho) = e,$$

$$\text{(C)}\quad \begin{cases} f(\mu(\varrho;\sigma)) = f(\mu(\varrho';\sigma')), & \text{wenn } d(\varrho) = d(\varrho'),\ d(\sigma) = d(\sigma'), \\ f'(\mu(\varrho;\sigma)) = f'(\mu(\varrho';\sigma')), & \text{wenn } d'(\varrho) = d'(\varrho'),\ d'(\sigma) = d'(\sigma'), \end{cases}$$

genügt.

Es sei $\{\mu(\varrho;\sigma)\}$ ein System von Größen aus Q derart, daß (C) erfüllt ist. Wenn nun auch $\{\nu(\varrho;\sigma)\}$ ein zulässiges System von Faktoren aus Q darstellt, das der Forderung (C) genügt, dann genügt auch

$$\{-\mu(\varrho;\sigma)\} \text{ und } \{\mu(\varrho;\sigma) + \nu(\varrho;\sigma)\}$$

derselben Forderung. Es bilden also diese zulässigen Systeme $\{\mu(\varrho;\sigma)\}$ eine abelsche Gruppe $F_z(Q;R)$. Ordnet man jedem Element $\varrho \in R$ ein Element $c''(\varrho) \in Q$ zu derart, daß gilt

$$\text{(D)}\quad \begin{cases} f(c''(\varrho)) = f(c''(\varrho')), & \text{wenn } d(\varrho) = d(\varrho'), \\ f'(c''(\varrho)) = f'(c''(\varrho')), & \text{wenn } d'(\varrho) = d'(\varrho'), \end{cases}$$

so ist auch

$$\{-c''(\varrho\sigma) + c''(\varrho)\,\sigma + c''(\sigma)\}$$

ein solches zulässiges System. Diese besonderen zulässigen Faktorensysteme bilden eine Untergruppe $T_z(Q;R)$ von $F_z(Q;R)$. Wir wissen schon, daß zwei Systeme $\{\mu(\varrho;\sigma)\}$ und $\{\nu(\varrho;\sigma)\}$ äquivalente Erweiterungen erzeugen, wenn es ein System von Größen $\{c''(\varrho)\} \in Q$ gibt mit den Eigenschaften (D) und der Eigenschaft

$$\{\mu(\varrho;\sigma) - \nu(\varrho;\sigma)\} = \{-c''(\varrho\sigma) + c''(\varrho)\,\sigma + c''(\sigma)\},$$

und der Definition der Gleichheit zufolge muß man die durch die $\{\mu(\varrho;\sigma)\}$ bestimmte Gruppe mit der durch die $\{\nu(\varrho;\sigma)\}$ bestimmten Gruppe identifizieren. Die $\{\mu(\varrho;\sigma)\}$ bestimmen eindeutig Lösungen $\{m(\alpha;\beta)\}$ und $\{m'(\alpha';\beta')\}$, während die $\{\nu(\varrho;\sigma)\}$ die

Systeme $\{n(\alpha;\beta)\}$ und $\{n'(\alpha';\beta')\}$ bestimmen. Dadurch hat man zwei Lösungen $\begin{tikzcd} G' & G \arrow[l] \\ & S \arrow[ul] \arrow[u] \end{tikzcd}$ und $\begin{tikzcd} \bar{G}' & \bar{G} \arrow[l] \\ & \bar{S} \arrow[ul] \arrow[u] \end{tikzcd}$, welche man der Definition der Gleichheit zufolge identifizieren muß.

Unser System von verschiedenen Lösungen (mit gegebenem Homomorphismus Θ) steht also in eineindeutiger Beziehung zu den Elementen der Faktorgruppe $F_z(Q;R)/T_z(Q;R)$. Zur Bestimmung eines Systems $\{\mu(\varrho;\sigma)\}$ mit den Eigenschaften (C) benutzen wir die Kohomologietheorie.

§ 5.

Es sei $F(\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_n)$ eine n-dimensionale Kokette der Veränderlichen $\varrho_1, \ldots, \varrho_n$ in R mit Werten in Q. Wir nennen insbesondere $F(\varrho_1, \ldots, \varrho_n)$ eine zulässige n-dimensionale Kokette, wenn gilt

$$f(F(\varrho_1, \ldots, \varrho_n)) = f(F(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)) \text{ für } d(\varrho_i) = d(\sigma_i);\ i = 1, 2, \ldots, n,$$
$$f'(F(\varrho_1, \ldots, \varrho_n)) = f'(F(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)) \text{ für } d'(\varrho_i) = d'(\sigma_i);\ i = 1, 2, \ldots, n.$$

Für $(F+G)(\varrho_1, \ldots, \varrho_n) = F(\varrho_1, \ldots, \varrho_n) + G(\varrho_1, \ldots, \varrho_n)$ ist die Summe zweier zulässiger n-dimensionaler Koketten F und G wieder eine zulässige Kokette; mithin bilden die zulässigen n-dimensionalen Koketten $F(\varrho_1, \ldots, \varrho_n)$ eine Untergruppe $C_z^n(R;Q)$ von $C^n(R;Q)$. Die nulldimensionalen Koketten — auch die zulässigen — sind die Elemente von Q: $C_z^0(R;Q) = C^0(R;Q) = Q$.

Jeder Kokette $F(\varrho_1, \ldots, \varrho_n)$ ist ein Korand $(\delta F)(\varrho_1, \ldots, \varrho_n, \varrho_{n+1})$ zugeordnet:

$$\begin{aligned}(\delta F)(\varrho_1, \ldots, \varrho_{n+1}) &\\ = F(\varrho_2, \ldots, \varrho_{n+1}) &+ \sum_{k=1}^{n} (-1)^k F(\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_{k-1}, \varrho_k\varrho_{k+1}, \ldots, \varrho_{n+1}) \\ &+ (-1)^{n+1} F(\varrho_1, \ldots, \varrho_n)\, \varrho_{n+1}.\end{aligned}$$

Ist insbesondere $F(\varrho_1, \ldots, \varrho_n)$ eine zulässige n-dimensionale Kokette, so ist leicht zu sehen, daß $(\delta F)(\varrho_1, \ldots, \varrho_{n+1})$ auch zulässig ist, d. h. daß

$$f\{(\delta F)(\varrho_1, \ldots, \varrho_{n+1})\} = f\{(\delta F)(\sigma_1, \ldots, \sigma_{n+1})\} \text{ für } d(\varrho_i) = d(\sigma_i),\ i = 1, \ldots, n+1,$$
$$f'\{(\delta F)(\varrho_1, \ldots, \varrho_{n+1})\} = f'\{(\delta F)(\sigma_1, \ldots, \sigma_{n+1})\} \text{ für } d'(\varrho_i) = d'(\sigma_i),\ i = 1, \ldots, n+1.$$

Es ist ja

$$f(F(\varrho_2, \ldots, \varrho_{n+1})) = f(F(\sigma_2, \ldots, \sigma_{n+1})) \text{ für } d(\varrho_i) = d(\sigma_i),$$
$$f'(F(\varrho_2, \ldots, \varrho_{n+1})) = f'(F(\sigma_2, \ldots, \sigma_{n+1})) \text{ für } d'(\varrho_i) = d'(\sigma_i)$$

und

$$f(F(\varrho_1, \ldots, \varrho_{i-1}, \varrho_i\varrho_{i+1}, \ldots, \varrho_{n+1})) = f(F(\sigma_1, \ldots, \sigma_{i-1}, \sigma_i\sigma_{i+1}, \ldots, \sigma_{n+1})) \text{ für } d(\varrho_i) = d(\sigma_i),$$
$$f'(F(\varrho_1, \ldots, \varrho_{i-1}, \varrho_i\varrho_{i+1}, \ldots, \varrho_{n+1})) = f'(F(\sigma_1, \ldots, \sigma_{i-1}, \sigma_i\sigma_{i+1}, \ldots, \sigma_{n+1})) \text{ für } d'(\varrho_i) = d'(\sigma_i),$$

und mit

$$f(F(\varrho_1, \ldots, \varrho_n)) = f(F(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)) \text{ auch}$$
$$f(F(\varrho_1, \ldots, \varrho_n)\,\varrho_{n+1}) = f(F(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)\,\sigma_{n+1}) \text{ wenn } d(\varrho_i) = d(\sigma_i)$$

und analog für die Abbildung f'.

Ist also $F(\varrho_1, \ldots, \varrho_n)$ zulässig, so ist auch der Korand δF zulässig.

Die n-dimensionalen zulässigen Koketten $F(\varrho_1, \ldots, \varrho_n)$ mit $\delta F = 0$ bilden eine Untergruppe $Z_z^n(R;Q)$, die Gruppe der sogenannten zulässigen n-dimensionalen Kozyklen:

$$Z_z^n(R;Q) < C_z^n(R;Q).$$

Für $n > 0$ sind jene n-dimensionalen Koketten, die Korand von zulässigen $(n-1)$-dimensionalen Koketten sind, zulässige n-dimensionale Kozyklen. Sie bilden eine Untergruppe $D_n^z(R;Q) \subset Z_n^z(R;Q)$. Die Faktorgruppe

$$H_z^n(R;Q) = Z_z^n(R;Q)/D_z^n(R;Q)$$

nennt man die reduzierte n-te Kohomologiegruppe von R hinsichtlich der Gruppe Q, der homomorphen Abbildungen f', f, d', d und der Gruppe R der Operatoren $\{\varepsilon, \varrho, \sigma, \ldots\}$. Für $n = 0$ sei $D_z^0(R;Q) = 0$.

$n = 0$. Eine zulässige nulldimensionale Kokette ist ein Element $q \in Q$. Der Korand dieses Elementes ist die — ebenfalls zulässige — eindimensionale Kokette $q - q\varrho$; q ist also nulldimensionaler Kozyklus, wenn $q = q\varrho$ für alle $\varrho \in R$. Die reduzierte nulldimensionale Kohomologiegruppe $H_z^0(R;Q)$ ist also jene Untergruppe von Q, deren Elemente q die Eigenschaft $q\varrho = q$ für alle $\varrho \in R$ haben; es gilt also $H_z^0(R;Q) = H^0(R;Q)$.

$n = 1$. Es sei $F(\varrho)$ eine zulässige eindimensionale Kokette, d. h.

$$\begin{aligned} f(F(\varrho)) &= f(F(\sigma)) \quad \text{für } d(\varrho) = d(\sigma), \\ f'(F(\varrho)) &= f'(F(\sigma)) \quad \text{für } d'(\varrho) = d'(\sigma). \end{aligned}$$

Dann ist

$$(\delta F)(\varrho_1, \varrho_2) = F(\varrho_2) - F(\varrho_1\varrho_2) + F(\varrho_1)\varrho_2$$

eine zulässige zweidimensionale Kokette; $F(\varrho)$ ist also ein zulässiger Kozyklus, wenn $F(\varrho\sigma) = F(\sigma) + F(\varrho)\sigma$ ist. Wir nennen diese eindimensionalen zulässigen Kozyklen $F(\varrho)$ zulässige gekreuzte Homomorphismen. Wenn nun außerdem ein solcher zulässiger gekreuzter Homomorphismus $F(\varrho)$ Korand eines bestimmten Elementes aus Q ist, also die Form $q - q\varrho$ hat, so ist $F(\varrho) \in D_z^1(R;Q)$. Also: $H_z^1(R;Q)$ ist die Faktorgruppe der Gruppe der zulässigen gekreuzten Homomorphismen nach der Untergruppe derjenigen zulässigen gekreuzten Homomorphismen, die Korand von Elementen von Q sind.

$n = 2$. Eine zweidimensionale Kokette $F(\varrho, \sigma)$ ist zulässig, wenn gilt

$$\begin{aligned} f(F(\varrho, \sigma)) &= f(F(\varrho_1, \sigma_1)) \text{ für } d(\varrho) = d(\varrho_1), \quad d(\sigma) = d(\sigma_1), \\ f'(F(\varrho, \sigma)) &= f'(F(\varrho_1, \sigma_1)) \text{ für } d'(\varrho) = d'(\varrho_1), \quad d'(\sigma) = d'(\sigma_1). \end{aligned}$$

Diese zulässige zweidimensionale Kokette $F(\varrho, \sigma)$ ist dann und nur dann ein Kozyklus, wenn

$$F(\varrho\sigma, \tau) + F(\varrho, \sigma)\tau = F(\varrho, \sigma\tau) + F(\sigma, \tau)$$

gilt, also wenn $\{F(\varrho, \sigma)\}$ ein zulässiges Faktorensystem in Q für eine Erweiterung von Q durch R mit den Operatoren $\varrho \in R$ ist. Also gilt $Z_z^2(R;Q) = F_z(Q;R)$, wo $F_z(Q;R)$ die Gruppe der zulässigen Faktorensysteme $\{\mu(\varrho;\sigma)\}$ für die Gruppe Q mit den Operatoren aus R ist derart, daß die Bedingungen (C) befriedigt werden. Eine zulässige Kokette $F(\varrho;\sigma)$ gehört gewiß $Z_z^2(R;Q)$ an, wenn $F(\varrho, \sigma)$ außerdem Korand einer eindimensionalen zulässigen Kokette $c''(\varrho)$ ist, also wenn

$$F(\varrho, \sigma) = -c''(\varrho\sigma) + c''(\varrho)\sigma + c''(\sigma)$$

ist, wo die $c''(\varrho)$ die Bedingungen (2) von § 2 befriedigen.

Also gilt $D_z^2(R;Q) = T_z(Q;R)$. Die reduzierte Kohomologiegruppe $H_z^2(R;Q)$ fällt demnach zusammen mit der Gruppe der verschiedenen Erweiterungen von Q durch R mit Operatoren aus R.

Systeme $\{n(\alpha;\beta)\}$ und $\{n'(\alpha';\beta')\}$ bestimmen. Dadurch hat man zwei Lösungen $\begin{matrix} G' & \longleftarrow & G \\ & \nwarrow\!\!\nearrow & \\ & S & \end{matrix}$ und $\begin{matrix} \bar{G}' & \longleftarrow & \bar{G} \\ & \nwarrow\!\!\nearrow & \\ & \bar{S} & \end{matrix}$, welche man der Definition der Gleichheit zufolge identifizieren muß.

Unser System von verschiedenen Lösungen (mit gegebenem Homomorphismus Θ) steht also in eineindeutiger Beziehung zu den Elementen der Faktorgruppe $F_z(Q;R)/T_z(Q;R)$. Zur Bestimmung eines Systems $\{\mu(\varrho;\sigma)\}$ mit den Eigenschaften (C) benutzen wir die Kohomologietheorie.

§ 5.

Es sei $F(\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_n)$ eine n-dimensionale Kokette der Veränderlichen $\varrho_1, \ldots, \varrho_n$ in R mit Werten in Q. Wir nennen insbesondere $F(\varrho_1, \ldots, \varrho_n)$ eine zulässige n-dimensionale Kokette, wenn gilt

$$f(F(\varrho_1, \ldots, \varrho_n)) = f(F(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)) \text{ für } d(\varrho_i) = d(\sigma_i);\ i = 1, 2, \ldots, n,$$
$$f'(F(\varrho_1, \ldots, \varrho_n)) = f'(F(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)) \text{ für } d'(\varrho_i) = d'(\sigma_i);\ i = 1, 2, \ldots, n.$$

Für $(F+G)(\varrho_1, \ldots, \varrho_n) = F(\varrho_1, \ldots, \varrho_n) + G(\varrho_1, \ldots, \varrho_n)$ ist die Summe zweier zulässiger n-dimensionaler Koketten F und G wieder eine zulässige Kokette; mithin bilden die zulässigen n-dimensionalen Koketten $F(\varrho_1, \ldots, \varrho_n)$ eine Untergruppe $C_z^n(R;Q)$ von $C^n(R;Q)$. Die nulldimensionalen Koketten — auch die zulässigen — sind die Elemente von Q: $C_z^0(R;Q) = C^0(R;Q) = Q$.

Jeder Kokette $F(\varrho_1, \ldots, \varrho_n)$ ist ein Korand $(\delta F)(\varrho_1, \ldots, \varrho_n, \varrho_{n+1})$ zugeordnet:

$$(\delta F)(\varrho_1, \ldots, \varrho_{n+1}) = F(\varrho_2, \ldots, \varrho_{n+1}) + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k F(\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_{k-1}, \varrho_k\varrho_{k+1}, \ldots, \varrho_{n+1}) + (-1)^{n+1} F(\varrho_1, \ldots, \varrho_n)\, \varrho_{n+1}.$$

Ist insbesondere $F(\varrho_1, \ldots, \varrho_n)$ eine zulässige n-dimensionale Kokette, so ist leicht zu sehen, daß $(\delta F)(\varrho_1, \ldots, \varrho_{n+1})$ auch zulässig ist, d. h. daß

$$f\{(\delta F)(\varrho_1, \ldots, \varrho_{n+1})\} = f\{(\delta F)(\sigma_1, \ldots, \sigma_{n+1})\} \text{ für } d(\varrho_i) = d(\sigma_i),\ i = 1, \ldots, n+1,$$
$$f'\{(\delta F)(\varrho_1, \ldots, \varrho_{n+1})\} = f'\{(\delta F)(\sigma_1, \ldots, \sigma_{n+1})\} \text{ für } d'(\varrho_i) = d'(\sigma_i),\ i = 1, \ldots, n+1.$$

Es ist ja

$$f(F(\varrho_2, \ldots, \varrho_{n+1})) = f(F(\sigma_2, \ldots, \sigma_{n+1})) \text{ für } d(\varrho_i) = d(\sigma_i),$$
$$f'(F(\varrho_2, \ldots, \varrho_{n+1})) = f'(F(\sigma_2, \ldots, \sigma_{n+1})) \text{ für } d'(\varrho_i) = d'(\sigma_i)$$

und

$$f(F(\varrho_1, \ldots, \varrho_{i-1}, \varrho_i\varrho_{i+1}, \ldots, \varrho_{n+1})) = f(F(\sigma_1, \ldots, \sigma_{i-1}, \sigma_i\sigma_{i+1}, \ldots, \sigma_{n+1})) \text{ für } d(\varrho_i) = d(\sigma_i),$$
$$f'(F(\varrho_1, \ldots, \varrho_{i-1}, \varrho_i\varrho_{i+1}, \ldots, \varrho_{n+1})) = f'(F(\sigma_1, \ldots, \sigma_{i-1}, \sigma_i\sigma_{i+1}, \ldots, \sigma_{n+1})) \text{ für } d'(\varrho_i) = d'(\sigma_i),$$

und mit

$$f(F(\varrho_1, \ldots, \varrho_n)) = f(F(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)) \text{ auch}$$
$$f(F(\varrho_1, \ldots, \varrho_n)\, \varrho_{n+1}) = f(F(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)\, \sigma_{n+1}) \text{ wenn } d(\varrho_i) = d(\sigma_i)$$

und analog für die Abbildung f'.

Ist also $F(\varrho_1, \ldots, \varrho_n)$ zulässig, so ist auch der Korand δF zulässig.

Die n-dimensionalen zulässigen Koketten $F(\varrho_1, \ldots, \varrho_n)$ mit $\delta F = 0$ bilden eine Untergruppe $Z_z^n(R;Q)$, die Gruppe der sogenannten zulässigen n-dimensionalen Kozyklen:

$$Z_z^n(R;Q) < C_z^n(R;Q).$$

Für $n > 0$ sind jene n-dimensionalen Koketten, die Korand von zulässigen $(n-1)$-dimensionalen Koketten sind, zulässige n-dimensionale Kozyklen. Sie bilden eine Untergruppe $D_n^z(R;Q) < Z_n^z(R;Q)$. Die Faktorgruppe

$$H_z^n(R;Q) = Z_z^n(R;Q)/D_z^n(R;Q)$$

nennt man die reduzierte n-te Kohomologiegruppe von R hinsichtlich der Gruppe Q, der homomorphen Abbildungen f', f, d', d und der Gruppe R der Operatoren $\{\varepsilon, \varrho, \sigma, \ldots\}$. Für $n = 0$ sei $D_z^0(R;Q) = 0$.

$n = 0$. Eine zulässige nulldimensionale Kokette ist ein Element $q \in Q$. Der Korand dieses Elementes ist die — ebenfalls zulässige — eindimensionale Kokette $q - q\varrho$; q ist also nulldimensionaler Kozyklus, wenn $q = q\varrho$ für alle $\varrho \in R$. Die reduzierte nulldimensionale Kohomologiegruppe $H_z^0(R;Q)$ ist also jene Untergruppe von Q, deren Elemente q die Eigenschaft $q\varrho = q$ für alle $\varrho \in R$ haben; es gilt also $H_z^0(R;Q) = H^0(R;Q)$.

$n = 1$. Es sei $F(\varrho)$ eine zulässige eindimensionale Kokette, d. h.

$$f(F(\varrho)) = f(F(\sigma)) \quad \text{für } d(\varrho) = d(\sigma),$$
$$f'(F(\varrho)) = f'(F(\sigma)) \quad \text{für } d'(\varrho) = d'(\sigma).$$

Dann ist

$$(\delta F)(\varrho_1, \varrho_2) = F(\varrho_2) - F(\varrho_1\varrho_2) + F(\varrho_1)\varrho_2$$

eine zulässige zweidimensionale Kokette; $F(\varrho)$ ist also ein zulässiger Kozyklus, wenn $F(\varrho\sigma) = F(\sigma) + F(\varrho)\sigma$ ist. Wir nennen diese eindimensionalen zulässigen Kozyklen $F(\varrho)$ zulässige gekreuzte Homomorphismen. Wenn nun außerdem ein solcher zulässiger gekreuzter Homomorphismus $F(\varrho)$ Korand eines bestimmten Elementes aus Q ist, also die Form $q - q\varrho$ hat, so ist $F(\varrho) \in D_z^1(R;Q)$. Also: $H_z^1(R;Q)$ ist die Faktorgruppe der Gruppe der zulässigen gekreuzten Homomorphismen nach der Untergruppe derjenigen zulässigen gekreuzten Homomorphismen, die Korand von Elementen von Q sind.

$n = 2$. Eine zweidimensionale Kokette $F(\varrho, \sigma)$ ist zulässig, wenn gilt

$$f(F(\varrho, \sigma)) = f(F(\varrho_1, \sigma_1)) \text{ für } d(\varrho) = d(\varrho_1),\ d(\sigma) = d(\sigma_1),$$
$$f'(F(\varrho, \sigma)) = f'(F(\varrho_1, \sigma_1)) \text{ für } d'(\varrho) = d'(\varrho_1),\ d'(\sigma) = d'(\sigma_1).$$

Diese zulässige zweidimensionale Kokette $F(\varrho, \sigma)$ ist dann und nur dann ein Kozyklus, wenn

$$F(\varrho\sigma, \tau) + F(\varrho, \sigma)\tau = F(\varrho, \sigma\tau) + F(\sigma, \tau)$$

gilt, also wenn $\{F(\varrho, \sigma)\}$ ein zulässiges Faktorensystem in Q für eine Erweiterung von Q durch R mit den Operatoren $\varrho \in R$ ist. Also gilt $Z_z^2(R;Q) = F_z(Q;R)$, wo $F_z(Q;R)$ die Gruppe der zulässigen Faktorensysteme $\{\mu(\varrho;\sigma)\}$ für die Gruppe Q mit den Operatoren aus R ist derart, daß die Bedingungen (C) befriedigt werden. Eine zulässige Kokette $F(\varrho;\sigma)$ gehört gewiß $Z_z^2(R;Q)$ an, wenn $F(\varrho, \sigma)$ außerdem Korand einer eindimensionalen zulässigen Kokette $c''(\varrho)$ ist, also wenn

$$F(\varrho, \sigma) = -c''(\varrho\sigma) + c''(\varrho)\sigma + c''(\sigma)$$

ist, wo die $c''(\varrho)$ die Bedingungen (2) von § 2 befriedigen.

Also gilt $D_z^2(R;Q) = T_z(Q;R)$. Die reduzierte Kohomologiegruppe $H_z^2(R;Q)$ fällt demnach zusammen mit der Gruppe der verschiedenen Erweiterungen von Q durch R mit Operatoren aus R.

Sind also A', B', A, B, Q, R mit den gegebenen homomorphen Abbildungen bekannt und ist Θ eine homomorphe Abbildung von R in die Automorphismengruppe von Q, welche außerdem die früher genannten Bedingungen von § 3 erfüllt, so gibt es eine eineindeutige Beziehung zwischen den möglichen nicht-äquivalenten Erweiterungen $S(Q; R)$ und den Elementen der reduzierten Kohomologiegruppe $H_z^2(R; Q)$. Besitzt man eine solche Erweiterung, so gehört zu ihr ein zulässiges System $\{\mu(\varrho; \sigma)\}$ (oder ein mit diesem äquivalentes System, d. h. ein System von Faktoren, das mit $\{\mu(\varrho; \sigma)\}$ in derselben Nebenklasse von T_z in F_z liegt). Wir wissen schon, daß die Faktoren $\{\mu(\varrho; \sigma)\}$ dann auch eindeutig zulässige Systeme $\{m'(\alpha'; \beta')\}$ und $\{m(\alpha; \beta)\}$ bestimmen und damit auch Erweiterungen $G'(A'; B')$ und $G(A; B)$ und homomorphe Abbildungen g, t, t' mit $t' = gt$. Damit haben wir uns einen Überblick über die sämtlichen möglichen Lösungen des Problems verschafft.

Eingegangen 4. Dezember 1957.

Die allgemeine Kegelschnittsgleichung in der ebenen hyperbolischen Geometrie. II.

Von *Kuno Fladt* in Calw (Württ.).

1. In einer Abhandlung des gleichen Titels[1]) wurde erstmals mit elementaren Mitteln eine vollständige Diskussion des hyperbolischen Kegelschnitts

$$(1\text{a})\quad f(x) \equiv a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{31}x_3x_1 + 2a_{12}x_1x_2 = 0$$

durchgeführt. Es fehlten aber noch die in den a_{ik} ganzrationalen Kriterien für das Eintreten der einzelnen Fälle. Diese sollen jetzt, jedoch auf einem ganz anderen Wege, bestimmt werden.

Wir beginnen dazu mit der in den Lehrbüchern der Algebra begründeten *Diskussion der Gleichung vierten Grades*

$$(2)\qquad \varphi(t) \equiv a_0t^4 + 4a_1t^3 + 6a_2t^2 + 4a_3t + a_4.$$

Sei

$$a_0a_4 - 4a_1a_3 + 3a_2^2 \equiv g_2, \quad \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix} \equiv g_3, \quad g_2^3 - 27g_3^2 \equiv \delta,$$

so gilt:

I. Fall: Alle 4 Wurzeln verschieden: $\delta \neq 0$;

1. *Unterfall: Alle 4 Wurzeln reell:* $\delta > 0$ und

$$(*)\qquad a_0a_2 - a_1^2 < 0, \quad \frac{a_0^2g_2}{12} - (a_0a_2 - a_1^2)^2 < 0;$$

2. *Unterfall: Alle 4 Wurzeln imaginär:* $\delta > 0$, aber (*) nicht gleichzeitig erfüllt;

3. *Unterfall: 2 Wurzeln reell, 2 imaginär:* $\delta < 0$.

II. Fall: Zwei der 4 Wurzeln gleich: $\delta = 0$;

1. *Unterfall: Die beiden anderen Wurzeln reell:* (*) gilt;

2. *Unterfall: Die beiden anderen Wurzeln imaginär:* (*) nicht gleichzeitig erfüllt.

III. Fall: Je zwei der 4 Wurzeln gleich:

$$\frac{a_0^2g_2}{12} - (a_0a_2 - a_1^2)^2 = 0, \qquad 2a_1^3 - 3a_0a_1a_2 + a_0^2a_3 = 0.$$

Die beiden verschiedenen Wurzeln sind $\left\{\begin{matrix} \textit{reell} \\ \textit{imaginär} \end{matrix}\right\}$, *wenn* $a_0a_2 - a_1^2 \lesseqgtr 0$.

[1]) *K. Fladt*, Die allgemeine Kegelschnittsgleichung in der ebenen hyperbolischen Geometrie. Journal reine und angew. Math. **197** (1957), 121–139.

IV. Fall: Drei der 4 Wurzeln gleich: $g_2 = 0,\ g_3 = 0.$

V. Fall: Alle 4 Wurzeln gleich: $a_0 a_2 - a_1^2 = 0,\ a_0 a_3 - a_1 a_2 = 0,\ a_0 a_4 - a_1 a_3 = 0.$

Wir fügen zu (1a) gleich noch die Klassengleichung

$$(1\text{b})\quad F(X) \equiv A_{11} X_1^2 + A_{22} X_2^2 + A_{33} X_3^2 + 2A_{23} X_2 X_3 + 2A_{31} X_3 X_1 + 2A_{12} X_1 X_2 = 0$$

hinzu, wo A_{ik} die zu a_{ik} gehörige Unterdeterminante in der Determinante $|a_{ik}| = a$ ist.

2. Der *absolute Kegelschnitt* (AK) der hyperbolischen Geometrie hat die Ordnungsgleichung

$$(3\text{a})\qquad (x/x) \equiv \varkappa(x_1^2 + x_2^2) + x_3^2 = 0$$

und die Klassengleichung

$$(3\text{b})\qquad (X/X) \equiv X_1^2 + X_2^2 + \varkappa X_3^2 = 0.$$

Daraus ergeben sich für ihn sofort die Parameterdarstellungen

$$(4\text{a})\qquad \varrho x_1 = 1 - t^2,\ \varrho x_2 = 2t,\ \varrho x_3 = \sqrt{-\varkappa}(1 + t^2)$$

und

$$(4\text{b})\qquad \varrho X_1 = \sqrt{-\varkappa}(1 - T^2),\ \varrho X_2 = \sqrt{-\varkappa}\, 2T,\ \varrho X_3 = 1 + T^2.$$

Trägt man (4a) in (1a) ein, so erhält man

$$(2\text{a})\qquad \varphi(t) \equiv a_0 t^4 + 4a_1 t^3 + 6a_2 t^2 + 4a_3 t + a_4 = 0,$$

wo mit

$$(5\text{a})\qquad a_{11} + a_{22} + \varkappa a_{33} = \alpha$$

$$(6\text{a})\quad \begin{cases} a_0 = a_{11} - \varkappa a_{33} - 2\sqrt{-\varkappa}\, a_{31}, & a_4 = a_{11} - \varkappa a_{33} + 2\sqrt{-\varkappa}\, a_{31} \\ a_1 = -a_{12} + \sqrt{-\varkappa}\, a_{23}, & a_2 = a_{22} - \dfrac{\alpha}{3}, \quad a_3 = a_{12} + \sqrt{-\varkappa}\, a_{23} \end{cases}$$

ist.

Trägt man (4b) in (1b) ein, so erhält man

$$(2\text{b})\qquad \Phi(T) \equiv A_0 T^4 + 4A_1 T^3 + 6A_2 T^2 + 4A_3 T + A_4,$$

wo mit

$$(5\text{b})\qquad \varkappa(A_{11} + A_{22}) + A_{33} = \mathsf{A}$$

$$(6\text{b})\quad \begin{cases} A_0 = -\varkappa A_{11} + A_{33} - 2\sqrt{-\varkappa}\, A_{31}, & A_4 = -\varkappa A_{11} + A_{33} + 2\sqrt{-\varkappa}\, A_{31}, \\ A_1 = \varkappa A_{12} + \sqrt{-\varkappa}\, A_{23}, & A_2 = -\varkappa A_{22} + \dfrac{\mathsf{A}}{3}, \quad A_3 = -\varkappa A_{12} + \sqrt{-\varkappa}\, A_{23} \end{cases}$$

ist.

Nunmehr wird

$$(7\text{a})\quad \begin{cases} g_2 = 4\left(\dfrac{\alpha^2}{3} - \mathsf{A}\right),\ g_3 = \dfrac{1}{2}\begin{vmatrix} a_0 - a_2 & a_1 & a_0 + a_2 \\ a_1 - a_3 & a_2 & a_1 + a_3 \\ a_2 - a_4 & a_3 & a_2 + a_4 \end{vmatrix} = 4\left(-\dfrac{2\alpha^3}{27} + \dfrac{\alpha\mathsf{A}}{3} - \varkappa a\right), \\ \delta = 16(\alpha^2\mathsf{A}^2 - 4\mathsf{A}^3 - 4\varkappa\alpha^3 + 18\varkappa a\alpha\mathsf{A} - 27\varkappa^2 a^2), \\ a_0 a_2 - a_1^2 = A_4 - a_0\dfrac{\alpha}{3}, \quad a_0 a_3 - a_1 a_2 = -2\left(A_3 + a_1\dfrac{\alpha}{3}\right), \\ a_0 a_4 - a_1 a_3 = \alpha^2 - \mathsf{A} - a_{22}\alpha - 3\varkappa A_{22}, \\ \dfrac{a_0^2 g_2}{12} - (a_0 a_2 - a_1^2)^2 = -a_0^2\dfrac{\mathsf{A}}{3} + 2a_0 A_4\dfrac{\alpha}{3} - A_4^2, \\ 2a_1^3 - 3a_0 a_1 a_2 + a_0^2 a_3 = 2(-a_0 A_3 + a_1 A_4) \end{cases}$$

und, wenn man die den Größen (7a) entsprechenden mit großen Buchstaben bezeichnet,

$$G_2 = 4\left(\frac{\mathsf{A}^2}{3} - \varkappa a\alpha\right),\ G_3 = 4\left(\frac{2\mathsf{A}^3}{27} - \frac{\varkappa a\mathsf{A}\alpha}{3} + \varkappa^2 a^2\right),\ \Delta = 16\,\varkappa^2 a^2 \delta,$$

$$A_0 A_2 - A_1^2 = -\varkappa a a_4 + A_0 \frac{\mathsf{A}}{3},\ A_0 A_3 - A_1 A_2 = -2\left(\varkappa a a_1 + A_3 \frac{\mathsf{A}}{3}\right),$$

$$A_0 A_4 - A_1 A_3 = \mathsf{A}^2 - \varkappa a\alpha - \varkappa A_{22}\mathsf{A} - 3\,\varkappa a_{22} a,$$

$$\frac{A_0^2 G_2}{12} - (A_0 A_2 - A_1^2)^2 = -\varkappa a\left(A_0^2 \frac{\alpha}{3} - 2 A_0 a_4 \frac{\mathsf{A}}{3} + \varkappa a a_4^2\right),$$

$$2 A_1^3 - 3 A_0 A_1 A_2 + A_0^2 A_3 = 2\,\varkappa a (A_1 a_4 - A_1 a_3).$$

3. Jetzt können wir auf Grund von [1]) gemäß dem Verhalten der Wurzeln der Gleichungen (2a) und (2b) die Bedingungen für die einzelnen Kegelschnitte angeben. Wir beginnen mit den *Mittelpunktskegelschnitten* und der *Semihyperbel.*

I. Fall: Alle 4 Wurzeln von (2a) und (2b) seien verschieden, d. h. es sei

$$\delta \neq 0 \text{ und damit } \Delta \neq 0.$$

1. *Unterfall*: *Konkave Hyperbel*: $\delta > 0$,

gleichzeitig (*) $A_4 - a_0 \frac{\alpha}{3} \equiv b_1 < 0,\ \frac{a_0^2}{3}\left(\frac{\alpha^2}{3} - \mathsf{A}\right) - \left(A_4 - a_0 \frac{\alpha}{3}\right)^2 \equiv b_2 < 0,$

gleichzeitig (**) $-\varkappa a a_4 + A_0 \frac{\mathsf{A}}{3} \equiv B_1 < 0,\ \frac{A_0^2}{3}\left(\frac{\mathsf{A}^2}{3} - \varkappa a\alpha\right) - \left(\varkappa a a_4 + A_0 \frac{\mathsf{A}}{3}\right)^2 \equiv B_2 < 0.$

2. *Unterfall*: *Konvexe Hyperbel*: $\delta > 0$,

gleichzeitig (*) $b_1 < 0,\ b_2 < 0$, *nicht* gleichzeitig (**) $B_1 < 0,\ B_2 < 0$.

3. *Unterfall*: *Ausschließend absoluter Kegelschnitt*: $\delta > 0$,

nicht gleichzeitig (*) $b_1 < 0,\ b_2 < 0$, gleichzeitig (**) $B_1 < 0,\ B_2 < 0$.

Der 4. *Unterfall* umschließt drei Möglichkeiten, die wir folgendermaßen trennen:

Die Verbindungsgerade $x = \lambda u + \mu v$ der Punkte u und v mit den Koordinaten $\widehat{uv} \equiv U$ trifft $f(x) = 0$ in zwei $\left\{\begin{matrix}\text{reellen}\\ \text{imaginären}\end{matrix}\right\}$ Punkten, wenn

$$f(u)\,f(v) - f^2(u/v) \equiv F(\widehat{uv}) \equiv F(U) \lessgtr 0$$

ist.

Vom Schnittpunkt $X = \lambda U + \mu V$ der Geraden U und V mit den Koordinaten $\widehat{UV} \equiv u$ gehen an $F(X) = 0$ zwei $\left\{\begin{matrix}\text{reelle}\\ \text{imaginäre}\end{matrix}\right\}$ Tangenten, wenn

$$F(U)\,F(V) - F^2(UV) \equiv a f(\widehat{UV}) \equiv a f(u) \lessgtr 0$$

ist.

Der Kegelschnitt ist *nullteilig*, wenn für *alle* u und *alle* U gilt $af(u) > 0,\ F(U) > 0$. Das gibt mit $u \equiv (1\,|\,0\,|\,0),\ (0\,|\,1\,|\,0),\ (0\,|\,0\,|\,1)$ und $U \equiv [1\,|\,0\,|\,0],\ [0\,|\,1\,|\,0],\ [0\,|\,0\,|\,1]$ folgende einfache Bedingungen für die

1. *Möglichkeit des* 4. *Unterfalles*: $a a_{ii} > 0,\ A_{kk} > 0,\ i, k = 1, 2, 3,\ i \neq k$, wobei übrigens je *eine* Möglichkeit von $i \neq k$ genügt.

Für die 2. *und* 3. *Möglichkeit des* 4. *Unterfalles* gilt zunächst (°) $\delta > 0$, *nicht* gleichzeitig $b_1 < 0,\ b_2 < 0$, *nicht* gleichzeitig $B_1 < 0,\ B_2 < 0$. Getrennt werden sie so:

2. *Möglichkeit*: Alle Punkte (4a) des AK liegen *innerhalb* $f(x) > 0$, für sie ist also $af(x) \equiv a\varphi(t) > 0$. Die Wurzeln von $a\varphi(t) = 0$ sind *imaginär*, also braucht nur noch

$$(\dagger) \qquad aa_0 \equiv a(a_{11} - \varkappa a_{22} - 2\sqrt{-\varkappa}\, a_{21}) > 0$$

zu sein.

3. *Möglichkeit*: Alle Punkte (4a) des AK liegen *außerhalb* $f(x) > 0$, d. h. es ist

$$(\dagger\dagger) \qquad aa_0 \equiv a(a_{11} - \varkappa a_{22} - 2\sqrt{-\varkappa}\, a_{21}) < 0;$$

(°) und (†) sind die Bedingungen für den *umschließenden außerabsoluten Kegelschnitt*, (°) und (††) diejenigen für die *Ellipse*.

Nun fehlt uns noch der

5. *Unterfall*: *Semihyperbel*: $\delta < 0$.

4. Wir kommen nun zu den *Parabeln* (abgesehen von der sog. *oskulierenden*).

II. Fall: Zwei der 4 Wurzeln von (2a) und (2b) seien gleich, d. h. es sei

$$\delta = 0 \text{ und damit } \Delta = 0.$$

1. *Unterfall*: $\delta = 0$, gleichzeitig (*) $b_1 < 0, b_2 < 0$, gleichzeitig (**) $B_1 < 0, B_2 < 0$;
Konkave hyperbolische Parabel
Zweiteilige Parabel } ihre Trennung s. u.

2. *Unterfall*: $\delta = 0$, gleichzeitig (*) $b_1 < 0$, $b_2 < 0$, *nicht* gleichzeitig (**) $B_1 < 0$, $B_2 < 0$;

Konvexe hyperbolische Parabel.

3. *Unterfall*: $\delta = 0$, *nicht* gleichzeitig (*) $b_1 < 0$, $b_2 < 0$, gleichzeitig (**) $B_1 < 0$, $B_2 < 0$;

Außerabsolute, ausschließende Parabel.

4. *Unterfall*: $\delta = 0$, *nicht* gleichzeitig (*) $b_1 < 0$, $b_2 < 0$, *nicht* gleichzeitig (**) $B_1 < 0$, $B_2 < 0$;

Elliptische Parabel: $aa_0 \equiv a(a_{11} - \varkappa a_{22} - 2\sqrt{-\varkappa}\, a_{21}) < 0$,

Außerabsolute, umschließende Parabel: $aa_0 \equiv a(a_{11} - \varkappa a_{22} - 2\sqrt{-\varkappa}\, a_{21}) > 0$.

Denn es muß, abgesehen vom Berührpunkt mit dem Parameter $t = t_0$

$$a\varphi(t) \lessgtr 0 \text{ sein.}$$

Die Trennung im 1. Unterfall erfolgt so: Sei $t - t_0$ der gemeinsame Faktor von

$$\varphi(t) = (t - t_0)^2\, \psi(t) \text{ und } \varphi'(t) = (t - t_0)\, \{2\, \psi(t) + (t - t_0)\, \psi'(t)\}.$$

Nun ist $\varphi(t_0 + \varepsilon) = \varepsilon^2\, \psi(t_0 + \varepsilon) \approx \varepsilon^2\, \psi(t_0)$, $\varphi''(t_0) = 2\, \psi(t_0)$,

also
$$\varphi(t_0 + \varepsilon) \approx \frac{\varepsilon^2}{2}\, \varphi''(t_0).$$

Bei der 1. Möglichkeit des 1. Unterfalles müssen die Nachbarpunkte des Berührpunktes eigentliche Punkte, d. h.

$$\frac{1}{12}\, \varphi''(t_0) \equiv a_0 t_0^2 + 2a_1 t_0 + a_2 < 0, \text{ sein,}$$

bei der 2. Möglichkeit müssen sie ideale Punkte, d. h.

$$\frac{1}{12}\, \varphi''(t_0) \equiv a_0 t_0^2 + 2a_1 t_0 + a_2 > 0, \text{ sein.}$$

Nach der Theorie der Gleichung 4. Grades ist im Falle $\delta = 0$ die Doppelwurzel von $\varphi(t) = 0$

$$t_0 = -\frac{a_1}{a_0} + \frac{2}{a_0}(-a_0 A_3 + a_1 A_4) : \left(a_0 \frac{\alpha}{3} - A_4 + a_0 \sqrt{\frac{\alpha^2}{9} - \frac{\mathsf{A}}{3}}\right).$$

5. *III. Fall.* Je zwei der Wurzeln sind gleich. Dann ist der Kegelschnitt ein *Kreis* oder eine *Abstandslinie.* Die Angabe der Kriterien erübrigt sich, da die Gleichung eines solchen Kegelschnittes nie anders als in der charakteristischen Gestalt $(m/x)^2 - \mu(x/x) = 0$ auftritt, die für $0 < (m/m) < \mu$ einen *Kreis*, für $(m/m) < 0 < \mu$ eine *Abstandslinie*, für $(m/m) = 0$ einen *Grenzkreis* darstellt.

6. *IV. Fall*: *Oskulierende Parabel.* Drei der Wurzeln sind gleich. Aus $g_2 = 0$, $g_3 = 0$, $G_2 = 0$, $G_3 = 0$ folgt $1 : \alpha = \alpha : 3\mathsf{A} = \mathsf{A} : 9\varkappa a$ oder das Verschwinden der Unterdeterminanten der Matrix $\begin{pmatrix} 1 & \alpha & \mathsf{A} \\ \alpha & 3\mathsf{A} & 9\varkappa a \end{pmatrix}$.

7. *V. Fall*: *Grenzkreis.* Alle 4 Wurzeln sind gleich. S. III. Fall.

8. *Schlußbemerkung.* Beim II. Fall $\delta = 0$ der *Parabeln* läßt sich im Gegensatz zum I. Fall noch eine ganz andere Art der Diskussion durchführen, die an anderer Stelle veröffentlicht werden soll. Die dazu sich ergebenden Kriterien sind viel einfacher als diejenigen in **4** und enthalten vor allem *nur* die *Invarianten* α, A, a. Im Gegensatz dazu sind die Kriterien in **4** spezielle Fälle der Kriterien in **3**. Formen dieser Kriterien, die den Kriterien in 8 übergeordnet sind, zu finden, ist mir noch nicht gelungen. Die Kriterien sind

Konkave hyperbolische Parabel: $a\alpha < 0$, $\mathsf{A} > \left(\frac{\alpha}{2\varkappa}\right)^2$;

Zweiteilige Parabel: $a\alpha > 0$, $\mathsf{A} > 0$;

Konvexe hyperbolische Parabel: $a\alpha > 0$, $\mathsf{A} < 0$

oder $a\alpha < 0$, $\mathsf{A} < \left(\frac{\alpha}{2\varkappa}\right)^2$;

Außerabsolute, ausschließende Parabel: $a\alpha < 0$, $\mathsf{A} < 0$

oder $a\alpha > 0$, $\mathsf{A} < \left(\frac{\alpha}{2\varkappa}\right)^2$;

Elliptische Parabel: $a\alpha < 0$, $\mathsf{A} > 0$;

Außerabsolute, umschließende Parabel: $a\alpha > 0$, $\mathsf{A} > \left(\frac{\alpha}{2\varkappa}\right)^2$.

Eingegangen 9. Juli 1957.

Verallgemeinerung der Siebmethode von A. Selberg auf algebraische Zahlkörper. I.

Von *G. J. Rieger* in Gießen.

Vor einigen Jahren gelang es A. Selberg, durch eine Verallgemeinerung des Begriffes „Siebmethode" die alten, mit der Brunschen Siebmethode erzielten Ergebnisse der Primzahltheorie einfacher zu beweisen und zum Teil zu verschärfen. Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, diese allgemeine Methode von A. Selberg auf beliebige algebraische Zahlkörper K zu verallgemeinern (Satz 1) und eine Anwendung zu geben (Satz 2). Wählt man dann speziell für K den Körper der rationalen Zahlen, so geht Satz 1 in den entscheidenden Satz von A. Selberg[1]) und Satz 2 in einen Satz von Čulanowski[2]) über. Auf weitere Anwendungen von Satz 1 soll hier noch nicht eingegangen werden.

Satz 1. *Es sei M eine natürliche Zahl $\geqq 2$; $\mathfrak{n}$ durchlaufe die M nicht notwendig verschiedenen Ideale $\mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_M$ eines algebraischen Zahlkörpers K; es bezeichne*

$\mathfrak{N}\mathfrak{d}$ *die Norm des Ideals $\mathfrak{d}$ aus K,*
$\mathfrak{o}$ *das Einheitsideal von K,*
$(\mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2)$ *den größten gemeinsamen Teiler der Ideale $\mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2$ aus K,*
$[\mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2]$ *das kleinste gemeinsame Vielfache der Ideale $\mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2$ aus K,*
$\mu(\mathfrak{d})$ *die auf Ideale $\mathfrak{d}$ aus K verallgemeinerte Möbiussche Funktion,*
$f(\mathfrak{d})$ *eine für alle Ideale $\mathfrak{d}$ aus K erklärte multiplikative Funktion mit*

$$1 < f(\mathfrak{d}) \leqq \infty \text{ für } \mathfrak{d} \neq \mathfrak{o}, \tag{1}$$

z eine beliebige reelle Zahl $\geqq 2$,
$S = N(\mathfrak{n}, \mathfrak{p} \nmid \mathfrak{n}$ für $\mathfrak{N}\mathfrak{p} \leqq z)$ die Anzahl der durch kein Primideal $\mathfrak{p}$ mit $\mathfrak{N}\mathfrak{p} \leqq z$ teilbaren Ideale $\mathfrak{n}$;

ferner sei

$$f_1(\mathfrak{r}) = \sum_{\mathfrak{d} \mid \mathfrak{r}} \mu(\mathfrak{d}) f\left(\frac{\mathfrak{r}}{\mathfrak{d}}\right) \quad \text{für jedes Ideal } \mathfrak{r} \text{ aus } K, \tag{2}$$

$$Z = \sum_{\mathfrak{N}\mathfrak{r} \leqq z} \frac{\mu^2(\mathfrak{r})}{f_1(\mathfrak{r})}, \tag{3}$$

$$S_{\mathfrak{d}} = \sum_{\substack{\mathfrak{n} \\ \mathfrak{d} \mid \mathfrak{n}}} 1, \tag{4}$$

$$R_{\mathfrak{d}} = S_{\mathfrak{d}} - \frac{M}{f(\mathfrak{d})}, \tag{5}$$

$$\lambda(\mathfrak{d}) = \frac{\mu(\mathfrak{d})}{Z} \prod_{\mathfrak{p} \mid \mathfrak{d}} \left(1 - \frac{1}{f(\mathfrak{p})}\right)^{-1} \sum_{\substack{\mathfrak{N}\mathfrak{r} \leqq z/\mathfrak{N}\mathfrak{d} \\ (\mathfrak{r}, \mathfrak{d}) = \mathfrak{o}}} \frac{\mu^2(\mathfrak{r})}{f_1(\mathfrak{r})}; \tag{6}$$

---

[1]) Vgl. neben [4] und [5] auch [3], 35—40.
[2]) Vgl. neben [1] auch [3], 41—42.

dann ist

$$S = \frac{M}{Z} + O\Big(\sum_{\substack{\mathfrak{N}\mathfrak{d}_1 \leqq z \\ \mathfrak{N}\mathfrak{d}_2 \leqq z}} |\lambda(\mathfrak{d}_1)\,\lambda(\mathfrak{d}_2)\,R_{[\mathfrak{d}_1,\mathfrak{d}_2]}|\Big). \tag{7}$$

Definition. *Eine für alle Ideale $\mathfrak{d}$ aus K erklärte, komplexwertige, nicht identisch verschwindende Funktion $f(\mathfrak{d})$ heißt multiplikativ, wenn aus $(\mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2) = \mathfrak{o}$ stets*

$$f(\mathfrak{d}_1\mathfrak{d}_2) = f(\mathfrak{d}_1)\,f(\mathfrak{d}_2)$$

folgt.

Dem Beweis von Satz 1 schicken wir einige vorbereitende Überlegungen voraus. Ist

$$\mathfrak{s} = \prod_{\mathfrak{N}\mathfrak{p} \leqq z} \mathfrak{p}, \tag{8}$$

so folgt wegen

$$\sum_{\mathfrak{d} \mid \mathfrak{r}} \mu(\mathfrak{d}) = \begin{cases} 1 & \text{für } \mathfrak{r} = \mathfrak{o}, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{9}$$

und wegen (4)

$$S = \sum_{\substack{\mathfrak{n} \\ (\mathfrak{n},\mathfrak{s}) = \mathfrak{o}}} 1 = \sum_{\mathfrak{n}} \sum_{\mathfrak{d} \mid (\mathfrak{n},\mathfrak{s})} \mu(\mathfrak{d}) = \sum_{\mathfrak{d} \mid \mathfrak{s}} \mu(\mathfrak{d})\,S_{\mathfrak{d}}. \tag{10}$$

Den Grundgedanken von A. Selberg übertragend, ersetzen wir in (10) die Zahlen $\mu(\mathfrak{d})$ durch zunächst beliebige Zahlen $\varrho(\mathfrak{d})$, für welche

$$\sum_{\mathfrak{d} \mid \mathfrak{r}} \varrho(\mathfrak{d}) \geqq \sum_{\mathfrak{d} \mid \mathfrak{r}} \mu(\mathfrak{d}) \tag{11}$$

ist für alle Ideale $\mathfrak{r}$ aus K. Dann ist

$$S \leqq \sum_{\mathfrak{n}} \sum_{\mathfrak{d} \mid (\mathfrak{n},\mathfrak{s})} \varrho(\mathfrak{d}) = \sum_{\mathfrak{d} \mid \mathfrak{s}} \varrho(\mathfrak{d})\,S_{\mathfrak{d}}. \tag{12}$$

Für $\mathfrak{r} = \mathfrak{o}$ liefert (11) die Aussage $\varrho(\mathfrak{o}) \geqq \mu(\mathfrak{o}) = 1$. Wir setzen daher $\varrho(\mathfrak{o}) = 1$. Haben wir zwei Systeme $\varrho'(\mathfrak{d})$, $\varrho''(\mathfrak{d})$ gefunden mit (11) und $\varrho'(\mathfrak{o}) = \varrho''(\mathfrak{o}) = 1$, so können wir ein drittes solches System $\varrho(\mathfrak{d})$ nach den sich gegenseitig bedingenden Formeln

$$\Big(\sum_{\mathfrak{d} \mid \mathfrak{r}} \varrho'(\mathfrak{d})\Big)\Big(\sum_{\mathfrak{d} \mid \mathfrak{r}} \varrho''(\mathfrak{d})\Big) = \sum_{\mathfrak{d} \mid \mathfrak{r}} \varrho(\mathfrak{d}),$$
$$\varrho(\mathfrak{d}) = \sum_{[\mathfrak{d}_1,\mathfrak{d}_2] = \mathfrak{d}} \varrho'(\mathfrak{d}_1)\,\varrho''(\mathfrak{d}_2)$$

bilden. Setzen wir insbesondere $\varrho'(\mathfrak{d}) = \varrho''(\mathfrak{d}) = \lambda(\mathfrak{d})$, so erfüllen die durch

$$\begin{cases} \Big(\sum_{\mathfrak{d} \mid \mathfrak{r}} \lambda(\mathfrak{d})\Big)^2 = \sum_{\mathfrak{d} \mid \mathfrak{r}} \varrho(\mathfrak{d}), \\ \varrho(\mathfrak{d}) = \sum_{[\mathfrak{d}_1,\mathfrak{d}_2] = \mathfrak{d}} \lambda(\mathfrak{d}_1)\,\lambda(\mathfrak{d}_2) \end{cases} \tag{13}$$

definierten Zahlen $\varrho(\mathfrak{d})$ auch (11), wenn das die $\lambda(\mathfrak{d})$ tun. Ja, es gilt offenbar noch mehr: Die $\varrho(\mathfrak{d})$ aus (13) erfüllen sogar (11), wenn nur $\lambda(\mathfrak{o}) = 1$ gesetzt wird (wenn also die $\lambda(\mathfrak{d})$ nicht notwendig (11) erfüllen). Setzen wir die $\varrho(\mathfrak{d})$ aus (13) in (12) ein, so folgt

$$S \leqq \sum_{\mathfrak{n}} \Big(\sum_{\mathfrak{d} \mid (\mathfrak{n},\mathfrak{s})} \lambda(\mathfrak{d})\Big)^2 = \sum_{\mathfrak{d} \mid \mathfrak{s}} \Big(\sum_{[\mathfrak{d}_1,\mathfrak{d}_2] = \mathfrak{d}} \lambda(\mathfrak{d}_1)\,\lambda(\mathfrak{d}_2)\Big)\,S_{\mathfrak{d}}. \tag{14}$$

Wir setzen nun $\lambda(\mathfrak{d}) = 0$ für alle $\mathfrak{d}$ mit $\mathfrak{N}\mathfrak{d} > z$. Wegen (8) genügt es also, die innere Summe in (14) über alle $\mathfrak{d}$ mit

$$\mathfrak{d} \mid \mathfrak{n},\ \mathfrak{N}\mathfrak{d} \leqq z,\ \mathfrak{d}\ \text{„quadratfrei“},$$

zu erstrecken (von selbst ist dann $\mathfrak{d} \mid (\mathfrak{n}, \mathfrak{s})$). Wir können auf die letztere Einschränkung verzichten und auch Zahlen $\lambda(\mathfrak{d})$ mit nicht quadratfreien $\mathfrak{d}$ verwenden, und es gilt immer noch

$$S = N(\mathfrak{n}, \mathfrak{d} \mid \mathfrak{n} \text{ für } 1 < \mathfrak{N}\mathfrak{d} \leqq z) = \sum_{\mathfrak{n}} \Big(\sum_{\substack{\mathfrak{d} \mid \mathfrak{n} \\ \mathfrak{N}\mathfrak{d} \leqq z}} \lambda(\mathfrak{d}) \Big)^2, \tag{15}$$

wenn nur $\lambda(\mathfrak{o}) = 1$ ist und im übrigen die $\lambda(\mathfrak{d})$ beliebig reell sind; denn es ist das Quadrat der inneren Summe $= 1$, wenn kein $\mathfrak{d}$ mit $1 < \mathfrak{N}\mathfrak{d} \leqq z$ das Ideal $\mathfrak{n}$ teilt, und sonst immer $\geqq 0$.

Beweis von Satz 1. Da für jede multiplikative Funktion $f(\mathfrak{d})$ gilt

$$f([\mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2])\, f((\mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2)) = f(\mathfrak{d}_1)\, f(\mathfrak{d}_2)$$

und da in (6) offenbar $\lambda(\mathfrak{o}) = 1$ ist, folgt aus (15), (5)

$$\begin{aligned} S &\leqq \sum_{\mathfrak{n}} \sum_{\substack{\mathfrak{d}_1 \mid \mathfrak{n}, \mathfrak{d}_2 \mid \mathfrak{n} \\ \mathfrak{N}\mathfrak{d}_1 \leqq z,\ \mathfrak{N}\mathfrak{d}_2 \leqq z}} \lambda(\mathfrak{d}_1)\, \lambda(\mathfrak{d}_2) \\ &= \sum_{\mathfrak{N}\mathfrak{d} \leqq z^2} \Big(\sum_{\substack{[\mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2] = \mathfrak{d} \\ \mathfrak{N}\mathfrak{d}_1 \leqq z,\ \mathfrak{N}\mathfrak{d}_2 \leqq z}} \lambda(\mathfrak{d}_1)\, \lambda(\mathfrak{d}_2) \frac{M}{f(\mathfrak{d})} \Big) + O\Big(\sum_{\substack{\mathfrak{N}\mathfrak{d}_1 \leqq z \\ \mathfrak{N}\mathfrak{d}_2 \leqq z}} \big| \lambda(\mathfrak{d}_1)\, \lambda(\mathfrak{d}_2)\, R_{[\mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2]} \big| \Big) \\ &= M \sum_{\substack{\mathfrak{N}\mathfrak{d}_1 \leqq z \\ \mathfrak{N}\mathfrak{d}_2 \leqq z}} \frac{\lambda(\mathfrak{d}_1)}{f(\mathfrak{d}_1)} \frac{\lambda(\mathfrak{d}_2)}{f(\mathfrak{d}_2)} f((\mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2)) + O\Big(\sum_{\substack{\mathfrak{N}\mathfrak{d}_1 \leqq z \\ \mathfrak{N}\mathfrak{d}_2 \leqq z}} \big| \lambda(\mathfrak{d}_1)\, \lambda(\mathfrak{d}_2)\, R_{[\mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2]} \big| \Big) \\ &= MQ + O(R). \end{aligned} \tag{16}$$

Da aus (2) wegen (9)

$$\sum_{\mathfrak{d} \mid \mathfrak{r}} f_1(\mathfrak{d}) = f(\mathfrak{r})$$

folgt, ergibt sich

$$\begin{aligned} Q &= \sum_{\substack{\mathfrak{N}\mathfrak{d}_1 \leqq z \\ \mathfrak{N}\mathfrak{d}_2 \leqq z}} \frac{\lambda(\mathfrak{d}_1)}{f(\mathfrak{d}_1)} \frac{\lambda(\mathfrak{d}_2)}{f(\mathfrak{d}_2)} \sum_{\substack{\mathfrak{r} \mid \mathfrak{d}_1 \\ \mathfrak{r} \mid \mathfrak{d}_2}} f_1(\mathfrak{r}) \\ &= \sum_{\mathfrak{N}\mathfrak{r} \leqq z} f_1(\mathfrak{r})\, y^2(\mathfrak{r}), \end{aligned} \tag{17}$$

wobei

$$\begin{aligned} y(\mathfrak{r}) &= \sum_{\substack{\mathfrak{r} \mid \mathfrak{d} \\ \mathfrak{N}\mathfrak{d} \leqq z}} \frac{\lambda(\mathfrak{d})}{f(\mathfrak{d})} \\ &= \sum_{\mathfrak{N}\mathfrak{d} \leqq z/\mathfrak{N}\mathfrak{r}} \frac{\lambda(\mathfrak{r}\mathfrak{d})}{f(\mathfrak{r}\mathfrak{d})} \end{aligned}$$

ist mit der offensichtlichen Umkehrung

$$\frac{\lambda(\mathfrak{d})}{f(\mathfrak{d})} = \sum_{\mathfrak{N}\mathfrak{r} \leqq z/\mathfrak{N}\mathfrak{d}} \mu(\mathfrak{r})\, y(\mathfrak{r}\mathfrak{d}). \tag{18}$$

Nun ist für quadratfreies $\mathfrak{r}$ nach (2) und wegen der Multiplikativität von $f(\mathfrak{r})$

$$(19)\qquad \begin{aligned} f_1(\mathfrak{r}) &= \sum_{\mathfrak{d}\mid\mathfrak{r}} \mu(\mathfrak{d})\, f\left(\frac{\mathfrak{r}}{\mathfrak{d}}\right) = f(\mathfrak{r}) \sum_{\mathfrak{d}\mid\mathfrak{r}} \frac{\mu(\mathfrak{d})}{f(\mathfrak{d})} \\ &= f(\mathfrak{r}) \prod_{\mathfrak{p}\mid\mathfrak{r}} \left(1-\frac{1}{f(\mathfrak{p})}\right) > 0 \qquad \text{(wegen (1))} \end{aligned}$$

$\left(\text{denn wegen } \left(\mathfrak{d}, \frac{\mathfrak{r}}{\mathfrak{d}}\right) = \mathfrak{o} \text{ ist } f(\mathfrak{r}) = f(\mathfrak{d})\, f\left(\frac{\mathfrak{r}}{\mathfrak{d}}\right)\right)$, und für quadratfreies $\mathfrak{r}, \mathfrak{d}$ mit $(\mathfrak{r}, \mathfrak{d}) = \mathfrak{o}$ gilt

$$(20)\qquad \begin{aligned} f_1(\mathfrak{r}\mathfrak{d}) &= f(\mathfrak{r}\mathfrak{d}) \prod_{\mathfrak{p}\mid\mathfrak{r}\mathfrak{d}} \left(1-\frac{1}{f(\mathfrak{p})}\right) \\ &= f(\mathfrak{r})\, f(\mathfrak{d}) \prod_{\mathfrak{p}\mid\mathfrak{r}} \left(1-\frac{1}{f(\mathfrak{p})}\right) \prod_{\mathfrak{p}\mid\mathfrak{d}} \left(1-\frac{1}{f(\mathfrak{p})}\right) \\ &= f_1(\mathfrak{r})\, f_1(\mathfrak{d}). \end{aligned}$$

Da in (6) $\mathfrak{d}, \mathfrak{r}$ als quadratfrei vorausgesetzt werden können, folgt aus (6) wegen (20), (19)

$$\begin{aligned} \frac{\lambda(\mathfrak{d})}{f(\mathfrak{d})} &= \frac{\mu(\mathfrak{d})}{Z} \sum_{\substack{\mathfrak{N}\mathfrak{r} \leqq z/\mathfrak{N}\mathfrak{d} \\ (\mathfrak{r},\mathfrak{d}) = \mathfrak{o}}} \frac{\mu^2(\mathfrak{r})}{f_1(\mathfrak{r}\mathfrak{d})} \\ &= \sum_{\mathfrak{N}\mathfrak{r} \leqq z/\mathfrak{N}\mathfrak{d}} \frac{\mu(\mathfrak{r})}{Z} \frac{\mu(\mathfrak{r}\mathfrak{d})}{f_1(\mathfrak{r}\mathfrak{d})}, \end{aligned}$$

woraus sich wegen (18)

$$(21)\qquad y(\mathfrak{r}) = \frac{\mu(\mathfrak{r})}{Z f_1(\mathfrak{r})}$$

ergibt. Das in (17), (16) eingetragen, liefert wegen (3) unmittelbar (7), was zu zeigen war.

Daß die $\lambda(\mathfrak{d})$ von (6) in gewisser Weise „bestmöglich" sind, kann man so einsehen: Bestimmt man unter der Nebenbedingung $\lambda(\mathfrak{o}) = 1$ oder wegen (18) unter der Nebenbedingung

$$\sum_{\mathfrak{N}\mathfrak{r} \leqq z} \mu(\mathfrak{r})\, y(\mathfrak{r}) = 1$$

das Minimum der quadratischen Form (17), so wird dieses, wie sich durch Anwenden der Multiplikatorenregel sofort herausstellt, für (21) angenommen; das ergibt wegen (18)

$$\frac{\lambda(\mathfrak{d})}{f(\mathfrak{d})} = \sum_{\mathfrak{N}\mathfrak{r} \leqq z/\mathfrak{N}\mathfrak{d}} \mu(\mathfrak{r}) \frac{\mu(\mathfrak{r}\mathfrak{d})}{Z f_1(\mathfrak{r}\mathfrak{d})} = \sum_{\substack{\mathfrak{N}\mathfrak{r} \leqq z/\mathfrak{N}\mathfrak{d} \\ (\mathfrak{r},\mathfrak{d}) = \mathfrak{o}}} \frac{\mu^2(\mathfrak{r})\, \mu(\mathfrak{d})}{Z f_1(\mathfrak{r}\mathfrak{d})},$$

woraus sich wegen (20), (19) sofort (6) ergibt.

Satz 2. *Bezeichnet* (z) *die Menge der Ideale*

$$(22)\qquad \mathfrak{m} = \prod_{\mathfrak{p}\mid\mathfrak{m}} \mathfrak{p}^{m_\mathfrak{p}}$$

aus K *mit*

$$\prod_{\mathfrak{p}\mid\mathfrak{m}} \mathfrak{N}\mathfrak{p} \leqq z$$

(*insbesondere gehören zu* (z) *alle Ideale* $\mathfrak{m}$ *mit* $\mathfrak{N}\mathfrak{m} \leqq z$), *so gilt in den Bezeichnungen von Satz* 1

$$(23)\qquad Z = \sum_{\mathfrak{m}\in(z)} \frac{1}{\mathfrak{N}\mathfrak{m}} \prod_{\mathfrak{p}\mid\mathfrak{m}} \omega^{m_\mathfrak{p}}(\mathfrak{p})$$

mit

$$\omega(\mathfrak{d}) = \frac{\mathfrak{N}\mathfrak{d}}{f(\mathfrak{d})} \qquad \textit{für alle Ideale } \mathfrak{d} \textit{ aus } K.$$

Ist außerdem R' eine beliebige positive, von $\mathfrak{d}$ unabhängige Grösse und ist in den Bezeichnungen von Satz 1

$$(24) \qquad \begin{aligned} |R_{\mathfrak{d}}| &\leqq R'\mathfrak{N}\mathfrak{d}^{e-1}\omega(\mathfrak{d}) \qquad (0 \leqq e \leqq 1), \\ \omega([\mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2]) &\leqq \omega(\mathfrak{d}_1)\,\omega(\mathfrak{d}_2) \end{aligned}$$

für alle Ideale $\mathfrak{d}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2$ aus K, so gilt

$$(25) \qquad R = \sum_{\substack{\mathfrak{N}\mathfrak{d}_1 \leqq z \\ \mathfrak{N}\mathfrak{d}_2 \leqq z}} |\lambda(\mathfrak{d}_1)\,\lambda(\mathfrak{d}_2)\,R_{[\mathfrak{d}_1,\mathfrak{d}_2]}| \leqq R' z^{1+e} \prod_{\mathfrak{N}\mathfrak{p} \leqq z} \left(1 - \frac{\omega(\mathfrak{p})}{\mathfrak{N}\mathfrak{p}}\right)^{-2}.$$

Beweis. Wegen

$$f(\mathfrak{r}) = \frac{\mathfrak{N}\mathfrak{r}}{\omega(\mathfrak{r})} = \prod_{\mathfrak{p}\,|\,\mathfrak{r}} \frac{\mathfrak{N}\mathfrak{p}}{\omega(\mathfrak{p})} \qquad (\mathfrak{r} \text{ quadratfrei})$$

und wegen (3), (19) gilt

$$\begin{aligned} Z &= \sum_{\mathfrak{N}\mathfrak{r} \leqq z} \mu^2(\mathfrak{r}) \frac{\omega(\mathfrak{r})}{\mathfrak{N}\mathfrak{r}} \prod_{\mathfrak{p}\,|\,\mathfrak{r}} \left(1 - \frac{\omega(\mathfrak{p})}{\mathfrak{N}\mathfrak{p}}\right)^{-1} \\ &= \sum_{\mathfrak{N}\mathfrak{r} \leqq z} \mu^2(\mathfrak{r}) \prod_{\mathfrak{p}\,|\,\mathfrak{r}} \left(\frac{\omega(\mathfrak{p})}{\mathfrak{N}\mathfrak{p}} + \frac{\omega^2(\mathfrak{p})}{\mathfrak{N}\mathfrak{p}^2} + \cdots\right), \end{aligned}$$

und durch Ausmultiplizieren folgt gerade (23). Nach (24) und $\mathfrak{N}[\mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2] \geqq \mathfrak{N}\mathfrak{d}_1$ ist weiter

$$|R_{[\mathfrak{d}_1,\mathfrak{d}_2]}| \leqq R'\mathfrak{N}\mathfrak{d}_1^{e-1}\omega(\mathfrak{d}_1)\,\omega(\mathfrak{d}_2),$$

also

$$\begin{aligned} R &= \sum_{\substack{\mathfrak{N}\mathfrak{d}_1 \leqq z \\ \mathfrak{N}\mathfrak{d}_2 \leqq z}} |\lambda(\mathfrak{d}_1)\,\lambda(\mathfrak{d}_2)\,R_{[\mathfrak{d}_1,\mathfrak{d}_2]}| \\ &\leqq R' \sum_{\substack{\mathfrak{N}\mathfrak{d}_1 \leqq z \\ \mathfrak{N}\mathfrak{d}_2 \leqq z}} |\lambda(\mathfrak{d}_1)\,\lambda(\mathfrak{d}_2)|\,\mathfrak{N}\mathfrak{d}_1^{e-1}\omega(\mathfrak{d}_1)\,\omega(\mathfrak{d}_2) \\ (26) \qquad &\leqq R'\Big(\sum_{\mathfrak{N}\mathfrak{d}_1 \leqq z} |\lambda(\mathfrak{d}_1)|\,\mathfrak{N}\mathfrak{d}_1^{e-1}\omega(\mathfrak{d}_1)\Big)\Big(\sum_{\mathfrak{N}\mathfrak{d}_2 \leqq z} |\lambda(\mathfrak{d}_2)|\,\omega(\mathfrak{d}_2)\Big) \\ &\leqq R'\Big(\sum_{\mathfrak{N}\mathfrak{d}_1 \leqq z} \mu^2(\mathfrak{d}_1)\,\mathfrak{N}\mathfrak{d}_1^{e-1}\omega(\mathfrak{d}_1) \prod_{\mathfrak{p}\,|\,\mathfrak{d}_1} \left(1 - \frac{\omega(\mathfrak{p})}{\mathfrak{N}\mathfrak{p}}\right)^{-1}\Big) \\ &\qquad \Big(\sum_{\mathfrak{N}\mathfrak{d}_2 \leqq z} \mu^2(\mathfrak{d}_2)\,\omega(\mathfrak{d}_2) \prod_{\mathfrak{p}\,|\,\mathfrak{d}_2} \left(1 - \frac{\omega(\mathfrak{p})}{\mathfrak{N}\mathfrak{p}}\right)^{-1}\Big) \end{aligned}$$

nach (6), da wegen $f_1(\mathfrak{r}) > 0$ (für quadratfreies $\mathfrak{r}$)

$$\sum_{\substack{\mathfrak{N}\mathfrak{r} \leqq z/\mathfrak{N}\mathfrak{d} \\ (\mathfrak{r},\mathfrak{d}) = \mathfrak{o}}} \frac{\mu^2(\mathfrak{r})}{f_1(\mathfrak{r})} \leqq \sum_{\mathfrak{N}\mathfrak{r} \leqq z} \frac{\mu^2(\mathfrak{r})}{f_1(\mathfrak{r})} = Z$$

ist. Wegen (22) hat man weiter für $0 \leqq a \leqq 1$

$$\begin{aligned} \sum_{\mathfrak{N}\mathfrak{d} \leqq z} \mu^2(\mathfrak{d})\,\mathfrak{N}\mathfrak{d}^{a-1}\omega(\mathfrak{d}) \prod_{\mathfrak{p}\,|\,\mathfrak{d}} \left(1 - \frac{\omega(\mathfrak{p})}{\mathfrak{N}\mathfrak{p}}\right)^{-1} &= \sum_{\mathfrak{N}\mathfrak{d} \leqq z} \mathfrak{N}\mathfrak{d}^a \mu^2(\mathfrak{d}) \prod_{\mathfrak{p}\,|\,\mathfrak{d}} \frac{\omega(\mathfrak{p})}{\mathfrak{N}\mathfrak{p}} \left(1 - \frac{\omega(\mathfrak{p})}{\mathfrak{N}\mathfrak{p}}\right)^{-1} \\ &\leqq z^a \sum_{\mathfrak{N}\mathfrak{d} \leqq z} \mu^2(\mathfrak{d}) \prod_{\mathfrak{p}\,|\,\mathfrak{d}} \left(\frac{\omega(\mathfrak{p})}{\mathfrak{N}\mathfrak{p}} + \frac{\omega^2(\mathfrak{p})}{\mathfrak{N}\mathfrak{p}^2} + \cdots\right) \\ &= z^a \sum_{\mathfrak{m} \in (z)} \frac{1}{\mathfrak{N}\mathfrak{m}} \prod_{\mathfrak{p}\,|\,\mathfrak{m}} \omega^{m_{\mathfrak{p}}}(\mathfrak{p}) \\ &\leqq z^a \prod_{\mathfrak{N}\mathfrak{p} \leqq z} \left(1 - \frac{\omega(\mathfrak{p})}{\mathfrak{N}\mathfrak{p}}\right)^{-1}, \end{aligned}$$

da $\omega(\mathfrak{d})$ offenbar multiplikativ und wegen (1) $\frac{\omega(\mathfrak{p})}{\mathfrak{N}\mathfrak{p}} < 1$ ist und da (z) Teilmenge der Menge der Zahlen ist, deren sämtliche Primfaktoren eine Norm $\leqq z$ haben Wenden wir (27). mit $a = e$ und $a = 1$ auf (26) an, ergibt sich unmittebar (25), was noch zu zeigen war.

In diesem Zusammenhang soll noch ein weiterer Satz bewiesen werden, der für den Fall des Körpers der rationalen Zahlen auf Möbius zurückgeht[3]).

Satz 3. *Es seien gewisse Ideale $\mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_M$ eines algebraischen Zahlkörpers K gegeben, von denen auch mehrere einander gleich sein können, und es sei $f(\mathfrak{n})$ eine für diese Ideale erklärte komplexwertige Funktion. Ferner sei für jedes Ideal $\mathfrak{d}$ aus K*

$$S_{\mathfrak{d}} = \sum_{\substack{\mathfrak{d} \mid \mathfrak{n}_i \\ 1 \leq i \leq M}} f(\mathfrak{n}_i),$$

und es sei

$$S = \sum_{\substack{\mathfrak{n}_i = 0 \\ 1 \leq i \leq M}} f(\mathfrak{n}_i).$$

Dann ist

$$S = \sum_{\mathfrak{d}} \mu(\mathfrak{d})\, S_{\mathfrak{d}},$$

wobei über alle Ideale $\mathfrak{d}$ aus K summiert wird, die irgendein $\mathfrak{n}_i$ teilen.

Beweis. Wegen (9) ist

$$S = \sum_{\substack{\mathfrak{n}_i = 0 \\ 1 \leq i \leq M}} f(\mathfrak{n}_i) = \sum_{1 \leq i \leq M} f(\mathfrak{n}_i) \sum_{\mathfrak{d} \mid \mathfrak{n}_i} \mu(\mathfrak{d})$$

$$= \sum_{\mathfrak{d}} \mu(\mathfrak{d}) \sum_{\substack{\mathfrak{d} \mid \mathfrak{n}_i \\ 1 \leq i \leq M}} f(\mathfrak{n}_i) = \sum_{\mathfrak{d}} \mu(\mathfrak{d})\, S_{\mathfrak{d}},$$

was zu zeigen war.

Die obigen Überlegungen lassen sich noch in folgender Weise verallgemeinern. Es bezeichne $\mathfrak{G}$ eine (multiplikativ geschriebene) freie Abelsche Gruppe mit abzählbar-unendlich vielen Erzeugenden $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots$. Unter einem Wort verstehen wir ein Element $\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{G}$ mit

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{p}_1^{a_1} \cdots \mathfrak{p}_r^{a_r} \qquad (a_i \geqq 0;\ i = 1, 2, \ldots, r).$$

Eine für alle $\mathfrak{a}$ aus $\mathfrak{G}$ erklärte Funktion $\mathfrak{N}\mathfrak{a}$ heißt Norm (von $\mathfrak{a}$), wenn $\mathfrak{N}\mathfrak{a}$ reell und > 0 ist für alle $\mathfrak{a}$ aus $\mathfrak{G}$, wenn $\mathfrak{N}\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \mathfrak{N}\mathfrak{a}\,\mathfrak{N}\mathfrak{b}$ für alle $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ aus $\mathfrak{G}$ und wenn die Menge der Zahlen $\mathfrak{N}\mathfrak{a}$ im Endlichen keinen Häufungswert hat. Die Menge der Worte aus der mit einer Norm versehenen Gruppe $\mathfrak{G}$ heißt eine arithmetische Halbgruppe.

Satz 4. *Die Sätze 1, 2, 3 übertragen sich wörtlich von der Menge der Ideale eines algebraischen Zahlkörpers K auf arithmetische Halbgruppen.*

Beweis. Offenbar bildet die Menge der Ideale eines algebraischen Zahlkörpers K eine arithmetische Halbgruppe, und man überzeugt sich sofort, daß wir beim Beweis der Sätze 1, 2, 3 nur Aussagen über K benutzt haben, die auch in jeder arithmetischen Halbgruppe gelten.

---

[3]) Vgl. neben [2] auch [3], 32—33.

Literaturverzeichnis.

[1] *I. V. Čulanowski*, Einige Abschätzungen, welche mit der neuen Methode von Selberg in der elementaren Zahlenthorie zusammenhängen. Doklady Akad. Nauk SSSR **63** (1948,) no. 5, 491–494.

[2] *A. F. Möbius*, Über eine besondere Art der Umkehrung von Reihen. J. reine angew. Math. **9** (1832), 105–123; Ges. Werke IV, 589–612.

[3] *K. Prachar*, Primzahlverteilung. Berlin-Göttingen-Heidelberg (1957).

[4] *A. Selberg*, On an elementary method in the theory of primes. Norske Vid. Selsk. Forh. Trondhjem **19** (1947), no. 18, 64–67.

[5] *A. Selberg*, The general sieve-method and its place in prime number theory. Proc. Int. Congr. Math. Cambridge Mass. USA **1** (1950), 286–292.

Eingegangen am 12. August 1957.

Verschärfung des Satzes von Richert über die Verteilung der quadratfreien Zahlen mit genau r Primfaktoren in einer arithmetischen Progression.

In memoriam Egon Ullrich (1902—1957).

Von *G. J. Rieger* in Gießen.

Wir bezeichnen mit χ die $\varphi(k)$ zum Modul k gehörigen Charaktere, insbesondere mit χ_0 den Hauptcharakter. $c_0, c_1, \ldots, c_{11}$ sind positive absolute Konstanten; $p, p_1, p_2, \ldots$ bezeichnen stets Primzahlen, $s = \sigma + it$ eine komplexe Veränderliche, x eine hinreichend große positive und vorläufig als halbzahlig vorausgesetzte Veränderliche, d. h.

$$x = [x] + \tfrac{1}{2}. \tag{1}$$

Ferner seien

$$L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n)\, n^{-s} = \prod_p \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1}, \quad \sigma > 1,$$

die zu den genannten Charakteren gehörigen Dirichletschen L-Reihen (für $\sigma \leqq 1$ durch analytische Fortsetzung erklärt) und

$$Z(s, \chi) = \sum_p \chi(p)\, p^{-s}, \quad \sigma > 1.$$

Weiter sei

$$F_r(s, \chi) = \sum_{\substack{0 \leq \nu_i \leq r;\, i = 1, 2, \ldots, r \\ \sum_{i=1}^{r} i\nu_i = r}} (-1)^{\nu_2 + \nu_4 + \cdots} \left(\prod_{n=1}^{r} \nu_n!\, n^{\nu_n}\right)^{-1} Z^{\nu_1}(s, \chi)\, Z^{\nu_2}(2s, \chi) \cdots Z^{\nu_r}(rs, \chi).$$

Unter $\log s$ werde stets der Hauptzweig dieser Funktion verstanden. Die auftretenden O-Konstanten hängen höchstens von r ab.

Für die Funktion

$$\pi_r(x; k, l) = \sum_{\substack{p_1 \cdots p_r \leq x,\, p_1 < \cdots < p_r \\ p_1 \cdots p_r \equiv l \pmod{k}}} 1$$

gilt folgender

Satz 1 (von Richert[1]). *Es seien r, k und l natürliche Zahlen, $(k, l) = 1$; dann gilt für $x \geqq 2$ und jedes $\varepsilon > 0$ gleichmäßig in k*

$$\begin{aligned} \pi_r(x; k, l) = {} & \frac{1}{\varphi(k)} \sum_{0 \leq m \leq M(x)} \sum_{0 \leq h \leq r-1} A_r(h, m, k)\, L_{h, m+1}(x) + O(x e^{-M(x)}) \\ & + O\left(x^{1 - \frac{1}{bk^\varepsilon}} \frac{(\log k \log\log x)^{r-1}}{\varphi(k) \log x}\right), \end{aligned} \tag{2}$$

---

[1]) Vgl. [2], Satz 1.

$$A_r(h,m,k) = \sum_{\substack{0 \le \nu_i \le r;\, i=1,\dots,r \\ \sum_{i=1}^{r} i\nu_i = r,\, \nu_1 \ge 1}} (-1)^{\nu_2+\nu_4+\cdots} \left(\prod_{n=1}^{r} \nu_n!\, n^{\nu_n}\right)^{-1} \sum_{0 \le \lambda \le \frac{\nu_1-1}{2}} \binom{\nu_1}{2\lambda+1} (-1)^{\lambda} \pi^{2\lambda}$$

$$\cdot \sum_{h \le \mu \le \nu_1-2\lambda-1} \binom{\nu_1-2\lambda-1}{\mu} d^{(\nu_1-2\lambda-1-\mu)}_{\nu_2,\nu_3,\dots,\nu_r}(m,k) \binom{\mu}{h} (-1)^{\mu-h} \Gamma^{(\mu-h)}(m+1),$$

$$M(x) = c_0 \sqrt{\log x}, \tag{3}$$

wo c_0 eine absolute Konstante und b eine nur von ε abhängige Konstante bezeichnet, wo die O-Konstanten höchstens von r abhängen, wo abkürzend

$$L_{h,n}(x) = \int_2^x \frac{(\log\log u)^h}{\log^n u}\, du$$

und

$$\Gamma^{(n)}(m+1) = \int_0^\infty e^{-\xi} \xi^m \log^n \xi d\xi$$

gesetzt wurde und wo die $d^{(\varrho)}_{\nu_2,\nu_3,\dots,\nu_r}(m,k)$ die Entwicklungskoeffizienten der in $|s-1| \le 1/4$ regulären Funktion

$$(Z(s,\chi_0) + \log(s-1))^{\varrho} Z^{\nu_2}(2s,\chi_0) \cdots Z^{\nu_r}(rs,\chi_0) = \sum_{m=0}^{\infty} d^{(\varrho)}_{\nu_2,\nu_3,\dots,\nu_r}(m,k)(1-s)^m$$

bedeuten.

Es ist offensichtlich, daß jede Vergrößerung der Größenordnung von $M(x)$ als eine Verschärfung von Satz 1 aufgefaßt werden kann. Das zu erreichen wird das Ziel der vorliegenden Arbeit sein (Satz 2). Es wird sich dabei herausstellen, daß (3) durch

$$M(x,k) = \frac{c_1 \log x}{\max(\log k,\ (\log x \log\log x)^{3/4})}$$

ersetzt werden kann[2]). In der Durchführung lehnen wir uns an [2] an und geben nur die Änderungen wieder, die an den dortigen Überlegungen anzubringen sind.

Beim Beweis von Satz 1 werden u. a. die folgenden vier Hilfssätze verwendet[3]).

Hilfssatz 2. *Es gibt ein c_2, so daß $L(s,\chi) \neq 0$ in*

$$\sigma \ge 1 - \frac{1}{c_2 \log k\, |t|}, \quad |t| \ge 3. \tag{4}$$

Hilfssatz 3. *Es gibt ein c_3, so daß*

$$\frac{L'}{L}(s,\chi) = O(\log k\, |t|) \tag{5}$$

in

$$1 - \frac{1}{c_3 \log k\, |t|} \le \sigma \le 2, \quad |t| \ge 4. \tag{6}$$

Hilfssatz 4. *Es ist $\log L(s,\chi)$ regulär in (6), und es gilt dort*

$$\log L(s,\chi) = O(\log k\, |t|). \tag{7}$$

---

[2]) Vgl. (25).

[3]) Die Hilfssätze werden wie in [2] numeriert.

Hilfssatz 11. *Es gibt ein c_4, so daß $Z(s,\chi)$ regulär ist in*

$$\frac{3}{4} \leqq 1 - \frac{1}{c_4 \log k\,|t|} \leqq \sigma \leqq 2,\ |t| \geqq 4, \tag{8}$$

und es gilt dort

$$Z(s,\chi) = O(\log k\,|t|) \tag{9}$$

und

$$Z(ns,\chi) = O(1) \text{ für } n \geqq 2.$$

Unter Ausnutzung dieser Hilfssätze gelangt Richert auf dem Wege zum Beweis von Satz 1 zu folgendem Zwischenergebnis[4]):

Es ist

$$\begin{aligned}\pi_r(x;k,l) = \frac{1}{\varphi(k)} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int\limits_S \frac{x^s}{s} F_r(s,\chi_0)\,ds + O\left(\frac{x\log x}{T}\right) + O\left(\frac{x^{1+a}}{T}\log^r kT\right)\\ + O\left(x^{1-\frac{a}{4}}\log^{r+1} kT\right) + O\left(x^{1-\frac{1}{bk^a}}\frac{(\log k \log\log x)^{r-1}}{\varphi(k)\log x}\right),\end{aligned} \tag{10}$$

wobei

$$a = \frac{1}{c_4 \log kT},\ T \geqq 4 \tag{11}$$

und S eine den Punkt $s = 1$ im positiven Sinne umlaufende Schleife von $1 - a$ nach 1 nach $1 - a$ ist.

Wie man sich sofort überzeugt, wird in [2] beim Beweis von (10) im wesentlichen von a nur benutzt, daß es in einer unteren Abschätzung (8) der Gestalt $1 - a \leqq \sigma \leqq 2$ auftritt, aus der immer noch (9) folgt. Nun ist bekannt, daß Aussagen vom Typ der Hilfssätze 1 bis 4 als direkte Folgerungen aus einer Aussage über die Größenordnung von $|L(s,\chi)|$ im kritischen Streifen aufgefaßt werden können[5]). Das bisher beste bekannte Resultat in dieser Richtung ist[6]):

Hilfssatz A. *In*

$$\sigma \geqq 1 - \frac{(\log\log|t|)^{2/3}}{\log^{2/3}|t|},\ |t| \geqq 3, \tag{12}$$

ist

$$|L(s,\chi)| = O\left(e^{c_5\left(\log k \cdot \frac{(\log\log|t|)^{2/3}}{\log^{2/3}|t|} + (\log\log|t|)^2\right)}\right). \tag{13}$$

Daraus folgt für die Hilfssätze 1 bis 4, daß in (4), (6), (8) und damit auch in (11) (eventuell mit anderen Konstanten)

$$\log k\,|t| \text{ durch } \max\left(\log k,\ (\log(|t|+3)\log\log(|t|+3))^{2/3}\right) \tag{14}$$

ersetzt werden kann[7]), während (5), (7), (9) stehenbleiben können[8]). Damit haben wir insbesondere gefunden:

---

[4]) Vgl. [2], (44).

[5]) Für die Begründung vgl. [7]).

[6]) Vgl. [1], 8. Satz 6. 1.

[7]) Den aus Hilfssatz 2 bzw. 3 bzw. 4 bzw. 11 durch die Substitution (14) entstehenden Hilfssatz bezeichnen wir mit Hilfssatz 2′ bzw. 3′ bzw. 4′ bzw. 11′. Für Hilfssatz 2′ vgl. [1], 8. Satz 6. 2; Hilfssatz 3′ folgt aus Hilfssatz A wie 8. Satz 7. 1 aus 8. Satz 6. 9 in [1]; für den Beweis von Hilfssatz 4′ bzw. 11′ vgl. den Beweis von Hilfssatz 4 bzw. 11 in [2].

[8]) Aus Hilfssatz A würde außerdem folgen, daß in den O-Gliedern von (5), (7), (9) und damit, wie man sich wieder leicht an Hand des Beweises für (11) in [2] überlegt, auch in (20) $\log k\,|t|$ zu $\log k + (\log|t| \log\log|t|)^{2/3}$ verbessert werden kann. Doch würde das im Endergebnis nicht in Erscheinung treten.

Es gilt (10) *mit*

$$\frac{1}{a} = c_6 \max(\log k, (\log T \log\log T)^{3/4}), \quad T \geqq 4. \tag{15}$$

Wir setzen jetzt

$$\log k \leqq (\log x \log\log x)^{3/7} \tag{16}$$

voraus, und nach bekanntem Vorbild verfügen wir dann über T so, daß die Summe der drei von T abhängigen Restglieder in (10) der Größenordnung nach möglichst klein wird. Das ist der Fall für

$$\log T = \frac{\log^{4/7} x}{(\log\log x)^{3/7}}. \tag{17}$$

Da wegen (17) offenbar die Voraussetzung (16) gleichbedeutend ist mit

$$\log k = O((\log T \log\log T)^{3/4}),$$

ist wegen (15)

$$c_7 (\log x \log\log x)^{3/7} \geqq \frac{1}{a}, \tag{18}$$

und es folgt[9]:

Unter Voraussetzung von (16) *ist mit einer* (*bei festem r*) *absoluten Konstante* c_8

$$\pi_r(x; k, l) = \frac{1}{\varphi(k)} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_S \frac{x^s}{s} F_r(s, \chi_0)\, ds$$
$$+ O\left(x e^{-c \frac{\log^{4/7} x}{(\log\log x)^{3/7}}}\right) + O\left(x^{1-\frac{1}{bk^8}} \cdot \frac{(\log k \log\log x)^{r-1}}{\varphi(k) \log x}\right).$$

Die Gültigkeit der Schlüsse in [2] bei der Berechnung des Schleifenintegrals über S bleibt unberührt, wenn man außer der Ersetzung für a, nämlich (15) bzw. (18) an Stelle von (11), noch (3) durch

$$M(x) = c_9 \frac{\log^{4/7} x}{(\log\log x)^{3/7}} \tag{19}$$

ersetzt. Man überzeugt sich sofort, daß die Argumentation wörtlich übertragen werden kann, und man gelangt über das Analogon von (63) in [2] zu einem Analogon von (65) in [2]:

Es ist

$$\pi_r(x; k, l) = \frac{1}{\varphi(k)} \sum_{0 \leq m \leq M(x)} \sum_{0 \leq h \leq r-1} A_r(h, m, k)\, L_{h,m+1}(x)$$
$$+ O(x e^{-M(x)}) + O\left(x^{1-\frac{1}{bk^8}} \frac{(\log k \log\log x)^{r-1}}{\varphi(k) \log x}\right) \tag{20}$$

mit (19) *an Stelle von* (3) *und unter Voraussetzung von* (16) *an Stelle der in* [2] *gemachten Voraussetzung*

$$\log k \leqq \frac{1}{2} \sqrt{\log x}. \tag{21}$$

[9]) Das ist das Analogon zu [2], (49).

Von der Einschränkung (1) kann man sich wie in [2] sofort befreien[10]). Ebenso wie man sich darüber hinaus von der Voraussetzung (21) befreien kann, ist das hier für die entsprechende Voraussetzung (18) möglich[11]). Es sei zunächst

$$(\log x \log\log x)^{3/2} \leqq \log k \leqq c_{10}\sqrt{\log x}. \tag{22}$$

In (dem für alle k gültigen) Satz 1 werde die Summe bis $M(x)$ erstreckt. Der hinzukommende Fehler ist in trivialer Abschätzung[12])

$$O\left(x\,\frac{(\log k \log\log x)^{r-1}}{\varphi(k)\log x}\right), \tag{23}$$

was wegen (22) ebenso wie das erste Fehlerglied des Satzes 1 vom zweiten majorisiert wird. Damit steht (20) auch für die k mit (22) da. Schließlich sei noch

$$\log k \geqq c_{10}\sqrt{\log x}.$$

Die triviale Abschätzung des Hauptgliedes ergibt wieder (23), was vom zweiten Fehlerglied von (20) majorisiert wird, und trivialerweise gilt[13])

$$\pi_r(x; k, l) = O(1) + O\left(\frac{x}{k}\right) = O\left(x^{1-\frac{1}{\log k}}\right).$$

Damit ist bewiesen:

Satz 2. *Es seien r, k und l natürliche Zahlen, $(k, l) = 1$; dann gilt für jedes $\varepsilon > 0$ gleichmäßig in k*

$$\begin{aligned}\pi_r(x; k, l) &= \frac{1}{\varphi(k)} \sum_{0 \leq m \leq M(x,k)} \sum_{0 \leq h \leq r-1} A_r(h, m, k)\, L_{h,m+1}(x) \\ &\quad + O\left(xe^{-M(x,k)}\right) + O\left(x^{1-\frac{1}{bk^\varepsilon}} \cdot \frac{(\log k \log\log x)^{r-1}}{\varphi(k)\log x}\right) \qquad (x \to \infty),\end{aligned} \tag{24}$$

$$\begin{aligned}A_r(h, m, k) = &\sum_{\substack{0 \leq \nu_i \leq r;\, i=1,\dots,r \\ \sum_{i=1}^{r} i\nu_i = r,\, \nu_1 \geq 1}} (-1)^{\nu_2+\nu_4+\cdots} \left(\prod_{n=1}^{r} \nu_n!\, n^{\nu_n}\right)^{-1} \sum_{0 \leq \lambda \leq \frac{\nu_1-1}{2}} \binom{\nu_1}{2\lambda+1} (-1)^\lambda \pi^{2\lambda} \\ &\cdot \sum_{h \leq \mu \leq \nu_1-2\lambda-1} \binom{\nu_1-2\lambda-1}{\mu} d^{(\nu_1-2\lambda-1-\mu)}_{\nu_2,\nu_3,\dots,\nu_r}(m, k) \binom{\mu}{h} (-1)^{\mu-h}\, \Gamma^{(\mu-h)}(m+1),\end{aligned}$$

$$M(x, k) = \frac{c_1 \log x}{\max(\log k, (\log x \log\log x)^{3/2})}, \tag{25}$$

wo c_1 eine (bei festem r) absolute Konstante und b eine nur von ε abhängige Konstante bezeichnet, wo die O-Konstanten höchstens von r abhängen, wo abkürzend

$$L_{h,n}(x) = \int_2^x \frac{(\log\log u)^h}{\log^n u}\, du$$

und

$$\Gamma^{(n)}(m+1) = \int_0^\infty e^{-\xi}\, \xi^m \log^n \xi\, d\xi$$

---

[10]) Vgl. [2], 192.

[11]) Daß das in so einfacher Weise möglich ist, hat mir Richert, dem ich an dieser Stelle für die kritische Durchsicht des Manuskriptes herzlich danken möchte, mitgeteilt.

[12]) Vgl. [2], 192.

[13]) Vgl. [2], 193.

gesetzt wurde und wo die $d^{(\varrho)}_{\nu_0,\nu_1,\ldots,\nu_r}(m, k)$ *die Entwicklungskoeffizienten der in* $|s-1| \leqq 1/4$ *regulären Funktion*

$$(Z(s, \chi_0) + \log(s-1))^{\varrho} Z^{\nu_1}(2s, \chi_0) \cdots Z^{\nu_r}(rs, \chi_0) = \sum_{m=0}^{\infty} d^{(\varrho)}_{\nu_0,\nu_1,\ldots,\nu_r}(m, k)(1-s)^m$$

bedeuten.

Dem Beweis von Satz 2 schließen wir noch einige Bemerkungen an:

1. Die auf Tatuzawa zurückgehende, bis heute beste bekannte Abschätzung im Primzahlsatz[14])

$$\pi(x) = \sum_{p \leqq x} 1 = \int_2^x \frac{du}{\log u} + O\left(x e^{-c_{10}\frac{\log^{4/7} x}{(\log\log x)^{2/7}}}\right) \qquad (x \to \infty) \tag{26}$$

ist in Satz 2 als Spezialfall enthalten. Setzt man nämlich $r = 1$ und $k = 1$, so bleibt im Hauptglied von (24) nur ein Summand stehen, und (24) geht in (26) über.

2. Für beliebiges r und $k = 1$ ist Satz 2 eine Verbesserung aller bisher bekannten Ergebnisse in dieser Richtung.

3. Das bis heute beste bekannte Ergebnis im Zusammenhang mit dem Primzahlsatz von Page-Siegel-Walfisz geht auch auf Tatuzawa zurück[15]) und lautet: Es gilt

$$\pi(x; k, l) = \frac{1}{\varphi(k)} \int_2^x \frac{du}{\log u} + O\left(\frac{x}{\varphi(k)} e^{-M(x,k)}\right) + O\left(\frac{x^{1-\frac{1}{bk^2}}}{\varphi(k)}\right) \qquad (x \to \infty)$$

gleichmäßig für alle k mit

$$\log k \leqq c_{11} \frac{\log x}{\log\log x}.$$

Satz 2 hingegen liefert: Es gilt gleichmäßig *für alle* k

$$\pi(x; k, l) = \frac{1}{\varphi(k)} \int_2^x \frac{du}{\log u} + O\left(x e^{-M(x,k)}\right) + O\left(\frac{x^{1-\frac{1}{bk^2}}}{\varphi(k)}\right) \qquad (x \to \infty).$$

---

[14]) Vgl. [1], 5.

[15]) Vgl. [1], 9. Satz 2. 2.

Literaturverzeichnis.

[1] *K. Prachar*, Primzahlverteilung, Berlin-Göttingen-Heidelberg (1957).

[2] *H.-E. Richert*, Über quadratfreie Zahlen mit genau r Primfaktoren in einer arithmetischen Progression. J. reine angew. Math. **192** (1954), 180–203.

Eingegangen am 20. August 1957.

≤ ¼

; im

t im

nten

lsatz

ion. J.